1 Risposta dinamica di strutture elastiche: forme periodiche

Le equazioni di equilibrio del sistema elastico ai vari gradi di libertà si presenta nella forma generica

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = F(t),\ x = x(t) \tag{1}$$

ove:

- M è la matrice di massa, simmetrica e definita positiva;
- C è la matrice di smorzamento viscoso, simmetrica e semidefinita positiva;
- K è la matrice di rigidezza, simmetrica e semidefinita positiva: tale matrice può essere a termini complessi se si include una quota di smorzamento strutturale;
- F(t) è il vettore delle forze nodali applicate;
- x(t) è la risposta nel tempo del sistema.

Nel caso si ricerchino soluzioni periodiche al problema, ovvero risposte *a regime* a *sollecitazioni di natura periodica*, si procede ad una scomposizione della forzante nelle sue singole armoniche (in ipotesi di linearità potrò poi ricomporre le risposte), in termini nella forma

$$F(t) = \bar{f}e^{j\omega t} \tag{2}$$

Ricordiamo che in tal modo si definisce una forma *complessa* dell'eccitante, la cui parte reale

$$\mathrm{Re}(\bar{f}e^{j\omega t}) = \mathrm{Re}\left(\bar{f}\right)\cos\omega t - \mathrm{Im}\left(\bar{f}\right)\sin\omega t \tag{3}$$

è la quota "fisicamente" applicata ai nodi nel tempo. Tale formalismo non è rigoroso ma è efficace, e in quanto tale risulta comunemente utilizzato.

Eventuali differenze di fase tra le eccitazioni trasmesse ai nodi sono definite dai termini complessi del vettore $\bar{f}$.

Omettendo i fenomeni di transitorio, si sostituisce entro la 1 la forma

$$x(t) = \bar{x}e^{j\omega t} \tag{4}$$

la cui quota reale rappresenta l'effettivo spostamento nodale nel tempo.

Si procede quindi alla scrittura della forma

$$\left(-\omega^2 M + j\omega C + K\right)\bar{x}e^{j\omega t} = \bar{f}e^{j\omega t} \tag{5}$$

che, dovendo valere $\forall t$, implica

$$\left(-\omega^2 M + j\omega C + K\right)\bar{x} = \bar{f} \tag{6}$$

ossia la soluzione di un sistema lineare a matrice e termine noto complessi, con matrice di sistema variabile in ω.

In particolare si nota che se il contributo dei termini di rigidezza è costante, il contributo dei termini viscosi e della matrice di massa cresce con ω e ω^2 rispettivamente.

1.1 Analisi modale

Si vanno a ricercare i *modi propri* della struttura, ossia quei particolari moti periodici che sono ammessi dall'equazione 1 anche in assenza di forzante applicata.

Condizione necessaria affinché un moto possa perdurare in assenza di forzanti è l'assenza di dissipazione entro il sistema, per cui è necessario porre $C = 0$ nonché K reale, riducendoci alla forma algebrica

$$\left(-\omega^2 M + K\right) \bar{x} = 0 \tag{7}$$

Le soluzioni non nulle di tale forma sono le coppie autovalore, autovettore $\left(\omega_i^2, \bar{x}_i\right)$ del problema agli autovettori generalizzato

$$\left(K - \omega^2 M\right) \bar{x} = 0 \tag{8}$$

ovvero, essendo M definita positiva e volendo ricondursi ad un problema agli autovalori standard,

$$\left(M^{-1} K - \omega^2 I\right) \bar{x} = 0 \tag{9}$$

Si nota in particolare che i valori ω_i^2 per cui esistono soluzioni non banali del problema sono definiti come le radici del polinomio

$$\det\left(K - \omega_i^2 M\right) = 0 \tag{10}$$

La coppia $\left(\omega_i^2, \bar{x}_i\right)$ rappresentano pulsazione e *forma* del modo proprio i-esimo; ricordando che l'autovettore è definito a meno di una costante moltiplicativa arbitraria, non hanno senso considerazioni basate sull'ampiezza in modulo dello stesso, frutto di una normalizzazione.

Tale normalizzazione può essere svolta come segue: si considera una generica scalatura $\hat{x}_i = \lambda \bar{x}_i$ dell'autovettore non normalizzato. Si definisce quindi λ sulla base dell'identità

$$\left(\hat{x}_i\right)^{\mathsf{T}} M \left(\hat{x}_i\right) = \left(\lambda \bar{x}_i\right)^{\mathsf{T}} M \left(\lambda \bar{x}_i\right) = 1 \tag{11}$$

da cui

$$\lambda^2 = \frac{1}{\left(\bar{x}_i\right)^{\mathsf{T}} M \left(\bar{x}_i\right)} \tag{12}$$

Tale forma normalizzata dell'autovettore in relazione alla matrice massa è detta *a massa modale unitaria* ed è quella usualmente impiegata dai solutori ad elementi finiti (vedi MSC.Marc).

È inoltre interessante notare che sostituendo la funzione risposta

$$x_i(t) = a_i \hat{x}_i e^{j\omega_i t} \tag{13}$$

entro la 1, si ottiene la forma algebrica

$$\underbrace{\left(K - \omega_i^2 M\right) a_i \hat{x}_i}_{=0} + j\omega_i C a_i \hat{x}_i = \bar{f} \tag{14}$$

la cui singolarità può essere prevenuta solo in presenza di una matrice di smorzamento non singolare, ed in particolare non nulla. In particolare, l'ampiezza della risposta[1] è calcolabile come

$$a_i = \frac{1}{j\omega_i} \frac{\hat{x}_i{}^{\mathsf{T}} \bar{f}}{\hat{x}_i^{\mathsf{T}} C \hat{x}_i} \tag{15}$$

[1] ricordiamo per correttezza formale che l'ampiezza di oscillazione è massima per $\omega = \omega_i$solo per termini smorzanti tendenti a 0

ove il termine $\hat{x_i}^{\intercal}\bar{f}$ è un termine di accoppiamento modo/forzante, mentre $\hat{x}_i^{\intercal}C\hat{x}_i$ è associato alla capacità del sistema di dissipare energia sullo specifico modo deformativo.

1.2 Analisi di risposta diretta

Si procede semplicemente alla soluzione del problema come da 6 per un dato campionamento di frequenze. Si ricorda che *non* è necessario ridurre lo smorzamento viscoso nella forma proporzionale (Rayleigh damping)

$$C = \alpha M + \beta K \tag{16}$$

normalmente implementata tuttavia nei codici di calcolo.

Poiché inoltre il calcolo è effettuato ad una determinata pulsazione ω (o frequenza $f = \omega/2\pi$) della forzante, non comporta complicazioni considerare i parametri del sistema $M, C, K, \bar{f}$ variabili in ω.

1.3 Analisi di risposta per sovrapposizione modale

Nel caso gli autovalori associati ai modi propri siano tutti distinti[2], vigono le condizioni di ortogonalità

$$\begin{aligned} \hat{x}_j^{\intercal}M\hat{x}_i &= \delta_{ji} \\ \hat{x}_j^{\intercal}K\hat{x}_i &= \delta_{ji}\omega_i^2 \end{aligned} \tag{17}$$

ove $\delta_{i,j}$ è la funzione delta di Kroneker, e

$$\hat{x}_i^{\intercal}M\hat{x}_i = m_i, \tag{18}$$

massa modale associata al modo i-esimo, risulta unitaria data la specifica normalizzazione di $\hat{x}_i$.

Componendo i primi m ($1 \leq m \leq n$) autovettori normalizzati a massa modale unitaria come colonne di una matrice modale

$$\hat{X} = [\hat{x}_1 \cdots \hat{x}_i \cdots \hat{x}_m] \tag{19}$$

ed andando a scrivere la generica soluzione del problema algebrico in coordinate associate a tale base (incompleta se $m < n$)[3]

$$\bar{x} = \hat{x}_1\bar{\xi}_1 + \hat{x}_2\bar{\xi}_2 + \ldots + \hat{x}_m\bar{\xi}_m = \hat{X}\bar{\xi} \tag{20}$$

si ottiene la forma

$$\hat{X}^{\intercal}\left(-\omega^2 M + j\omega\underbrace{(\alpha M + \beta K)}_{C} + K\right)\hat{X}\bar{\xi} = \hat{X}^{\intercal}\bar{f} \tag{21}$$

da cui, per ortogonalità

$$\left(-\omega^2 I + j\omega(\alpha I + \beta\Lambda) + \Lambda\right)\bar{\xi} = \bar{q} \tag{22}$$

[2] ipotesi che considereremo verificata, perturbando il sistema se necessario

[3] se gli autovalori sono distinti, gli autovettori sono linearmente indipendenti e costituiscono una base per lo spazio delle soluzioni

ove I è la matrice identità e $\Lambda = \mathrm{diag}\left(\omega_i^2\right)$ è una matrice diagonale contenente la successione delle m pulsazioni proprie. Tale sistema è diagonale, ossia è possibile risolvere indipendentemente le N equazioni

$$\left(-\omega^2 + j\alpha\omega + j\beta\omega\omega_i^2 + \omega_i^2\right)\bar{\xi}_i = \bar{q}_i \quad i = 1 \ldots N \tag{23}$$

associate ad equazioni dinamiche nella forma

$$\ddot{\xi}_i + 2\omega_i \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\omega_i} + \beta\omega_i\right)}_{\zeta_i}\dot{\xi}_i + \omega_i^2\xi_i = \bar{q}_i e^{j\omega t}, \quad \xi_i = \bar{\xi}_i e^{j\omega t}, \quad i = 1 \ldots N \tag{24}$$

ove la massa è resa unitaria dalla scalatura di $\hat{x}_i$. Tali equazioni rappresentano m oscillatori a singolo grado di libertà indipendenti, di frequenza propria ω_i e smorzamento frazione del critico $\zeta_i = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\omega_i} + \beta\omega_i\right)$. Andando a considerare la risposta di ogni singolo oscillatore alla forzante e andando a comporre tali risposte - ricordiamo che il sistema è lineare - possiamo ricostruire la risposta dei sistema ad n gradi di libertà.

Si nota che si è utilizzata la forma proporzionale dello smorzamento in quanto non esistono proprietà di ortogonalità tra i modi propri ed una generica matrice di smorzamento C, per cui il sistema 21 non sarebbe diagonalizzabile. La presenza di una matrice smorzamento non diagonalizzabile induce accoppiamento tra i vari oscillatori modali; una forzosa diagonalizzazione di tale matrice può essere svolta in un'ottica di approssimazione.

Andando ad analizzare la soluzione classica per l'oscillatore ad un grado di libertà si ha

$$\begin{aligned}
\xi_i(t) &= \left|\bar{\xi}_i\right| \cos\left(\omega t + \psi_i - \phi_i\right) && (25)\\
&= \mathrm{Re}\left(\bar{\xi}_i\right)\cos\omega t - \mathrm{Im}\left(\bar{\xi}_i\right)\sin\omega t && (26)
\end{aligned}$$

ove, una volta definiti i termini ausiliari

$$\begin{aligned}
r_i &= \frac{\omega}{\omega_i}\\
a_i &= 1 - r_i^2\\
b_i &= 2\zeta_i r_i,
\end{aligned}$$

le quantità

$$\begin{aligned}
\left|\bar{\xi}_i\right| &= \frac{|\bar{q}_i|}{\omega_i^2}\frac{1}{\sqrt{a_i^2 + b_i^2}}\\
\mathrm{Re}\left(\bar{\xi}_i\right) &= \frac{1}{\omega_i^2}\frac{a_i\,\mathrm{Re}\left(\bar{q}_i\right) + b_i\,\mathrm{Im}\left(\bar{q}_i\right)}{a_i^2 + b_i^2}\\
\mathrm{Im}\left(\bar{\xi}_i\right) &= \frac{1}{\omega_i^2}\frac{a_i\,\mathrm{Im}\left(\bar{q}_i\right) - b_i\,\mathrm{Re}\left(\bar{q}_i\right)}{a_i^2 + b_i^2},
\end{aligned}$$

sono rispettivamente modulo, parte reale e parte immaginaria della risposta;

$$\psi_i = \arg\left(\bar{q}_i\right) = \arg\left(\hat{x}_i^{\mathsf{T}} f\right)$$

è la fase della eccitante lo specifico modo proprio, mentre

$$\phi_i = \arg\left(a_i + jb_i\right)$$

è il ritardo tra la risposta del sistema e tale eccitazione.

La funzione fase arg è definita come

$$\arg\left(x + jy\right) = \operatorname{atan2}\left(y, x\right) = \begin{cases} \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & y \geq 0 \\ -\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & y < 0 \end{cases}$$