

Link di forze/momenti risultanti distribuiti
(RBE3)

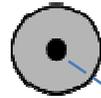
Rigid Body Element 3

n NODI INDIPENDENTI

$$P_i(x_i, y_i, z_i)$$
$$q_i$$

$$P_1(x_1, y_1, z_1)$$

$$q_1 = 2$$



$$P_3(x_3, y_3, z_3)$$

$$q_3 = 2$$

???

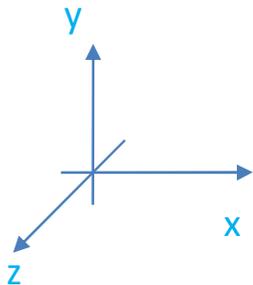
$$C(x_C, y_C, z_C)$$

NODO DIPENDENTE

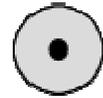
→ NODO DI CONTROLLO ALLE FORZE

$$P_2(x_2, y_2, z_2)$$

$$q_2 = 3$$



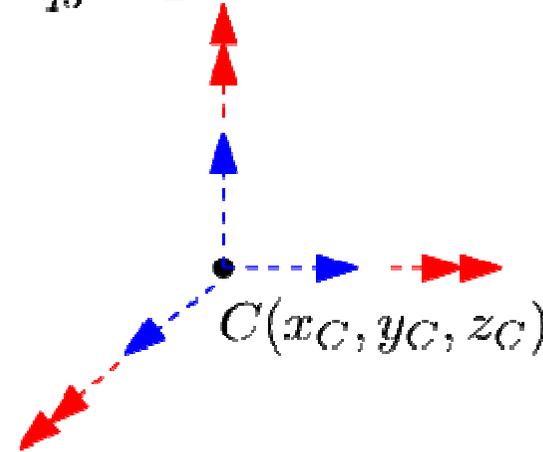
$P_i(x_i, y_i, z_i)$
 q_i



$P_3(x_3, y_3, z_3)$
 $q_3 = 2$

$P_1(x_1, y_1, z_1)$

$q_1 = 2$

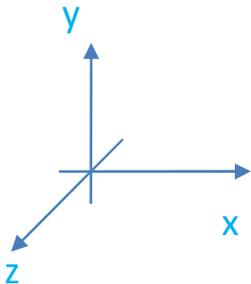


$$\underline{F}_C = \left[\begin{array}{|c|c|c|} \hline U_C & V_C & W_C \\ \hline \Omega_C & \Phi_C & \Psi_C \\ \hline \end{array} \right]^T$$

FORZE

MOMENTI

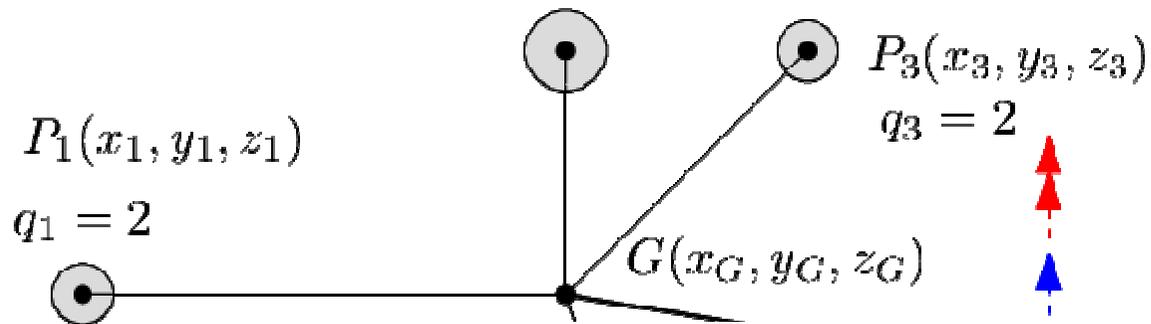
$P_2(x_2, y_2, z_2)$
 $q_2 = 3$



n NODI INDIPENDENTI

$$P_i(x_i, y_i, z_i)$$

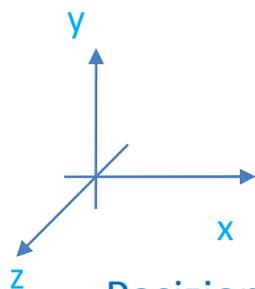
$$q_i$$



CENTRO DI MASSA DELLA
NUVOLA DI PUNTI

NODO DIPENDENTE

→ NODO DI CONTROLLO ALLE FORZE



Posizione del
centro di massa

$$P_2(x_2, y_2, z_2)$$
$$q_2 = 3$$

$$x_G = \frac{\sum_i q_i x_i}{\sum_i q_i}$$

$$y_G = \frac{\sum_i q_i y_i}{\sum_i q_i}$$

$$z_G = \frac{\sum_i q_i z_i}{\sum_i q_i}$$

Si definire una relazione cinematica alle rototraslazioni tale che:

“le rototraslazioni di C sugli assi x, y, z sono definite in funzione delle rototraslazioni del centro di massa G secondo il vincolo di rototraslazione rigida [\underline{L}_{CG}]”

$$\underline{\delta}_C = \begin{bmatrix} u_C & v_C & w_C & \theta_C & \phi_C & \psi_C \end{bmatrix}^T$$

$$\underline{\delta}_G = \begin{bmatrix} u_G & v_G & w_G & \theta_G & \phi_G & \psi_G \end{bmatrix}^T$$

TRASLAZIONI
ROTAZIONI

Vettore rototraslazioni associato a C

Vettore rototraslazioni associato a G

$$\begin{matrix} \text{Traslazioni X, Y, Z} & \text{Rotazione X, Y, Z} \\ \begin{bmatrix} u_C \\ v_C \\ w_C \\ \theta_C \\ \phi_C \\ \psi_C \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & +(z_C - z_G) & -(y_C - y_G) \\ 0 & 1 & 0 & -(z_C - z_G) & 0 & +(x_C - x_G) \\ 0 & 0 & 1 & +(y_C - y_G) & -(x_C - x_G) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} u_G \\ v_G \\ w_G \\ \theta_G \\ \phi_G \\ \psi_G \end{bmatrix} \\ \delta_C & & \underbrace{\hspace{10em}}_{\underline{L}_{CG}} & & \delta_G \end{matrix}$$

ASSEMBLAGGIO MATRICE L_{CG} (6x6)

$$\begin{bmatrix} u_C \\ v_C \\ w_C \\ \theta_C \\ \phi_C \\ \psi_C \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & +(z_C - z_G) & -(y_C - y_G) \\ 0 & 1 & 0 & -(z_C - z_G) & 0 & +(x_C - x_G) \\ 0 & 0 & 1 & +(y_C - y_G) & -(x_C - x_G) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{L_{CG}}} \cdot \begin{bmatrix} u_G \\ v_G \\ w_G \\ \theta_G \\ \phi_G \\ \psi_G \end{bmatrix}$$

δ_C δ_G

Contributo di una traslazione in X (o Y, o Z).

$$\begin{bmatrix} u_C \\ v_C \\ w_C \\ \theta_C \\ \phi_C \\ \psi_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & ? & ? & ? \\ 0 & 1 & 0 & ? & ? & ? \\ 0 & 0 & 1 & ? & ? & ? \\ 0 & 0 & 0 & ? & ? & ? \\ 0 & 0 & 0 & ? & ? & ? \\ 0 & 0 & 0 & ? & ? & ? \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_G \\ v_G \\ w_G \\ \theta_G \\ \phi_G \\ \psi_G \end{bmatrix}$$

Hp) Piccoli spostamenti considero il vincolo di traslazione rigida tra C e G.

Il solo i singoli contributi, considerando che la traslazione avvenga con direzione coerente al versore del sistema di riferimento

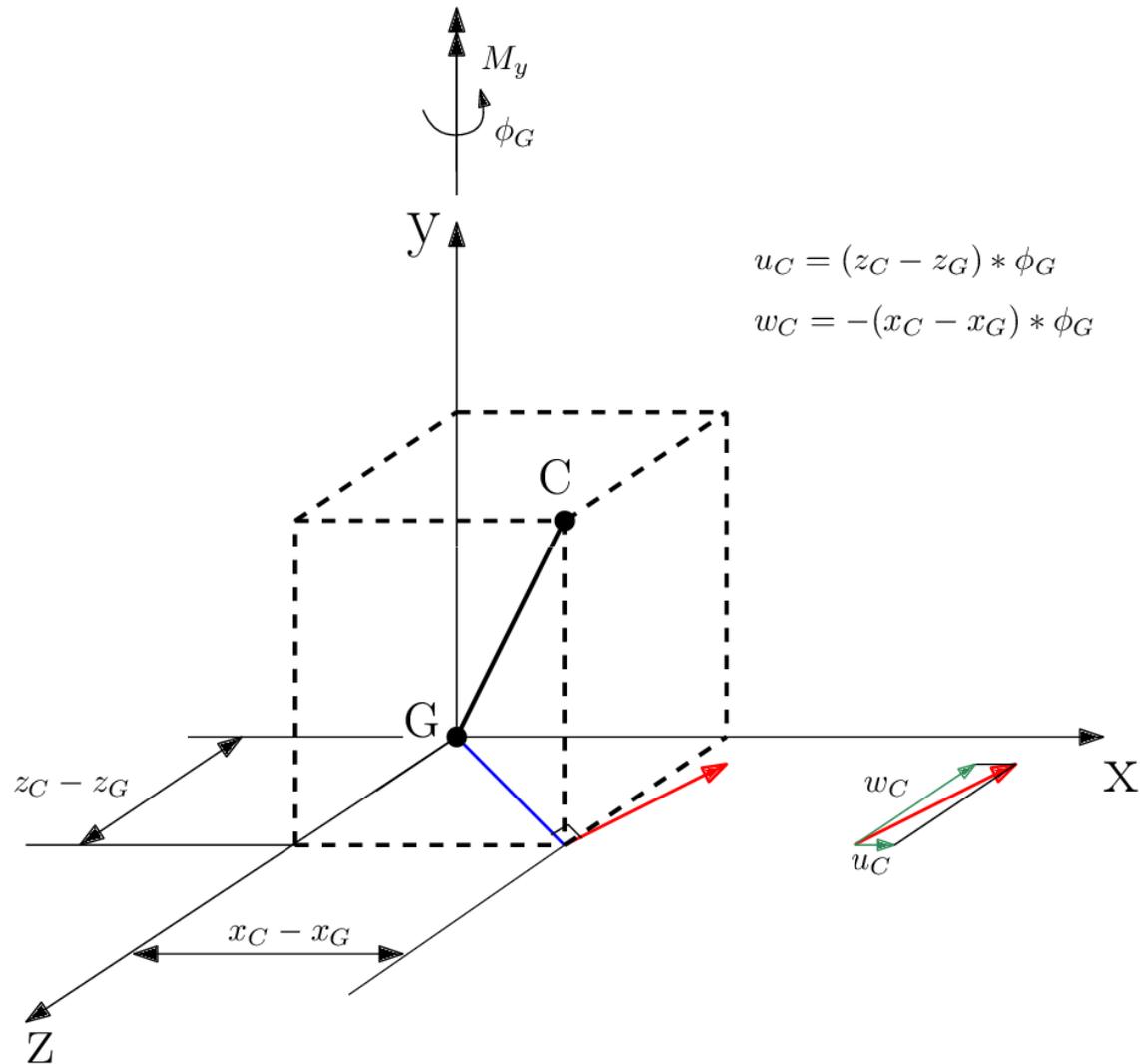
Traslazione lungo l'asse X imposta $\rightarrow u_C - u_G = 1 \text{ mm}$ (versore i)

Traslazione lungo l'asse Y imposta $\rightarrow v_C - v_G = 1 \text{ mm}$ (versore j)

Traslazione lungo l'asse Z imposta $\rightarrow w_C - w_G = 1 \text{ mm}$ (versore k)

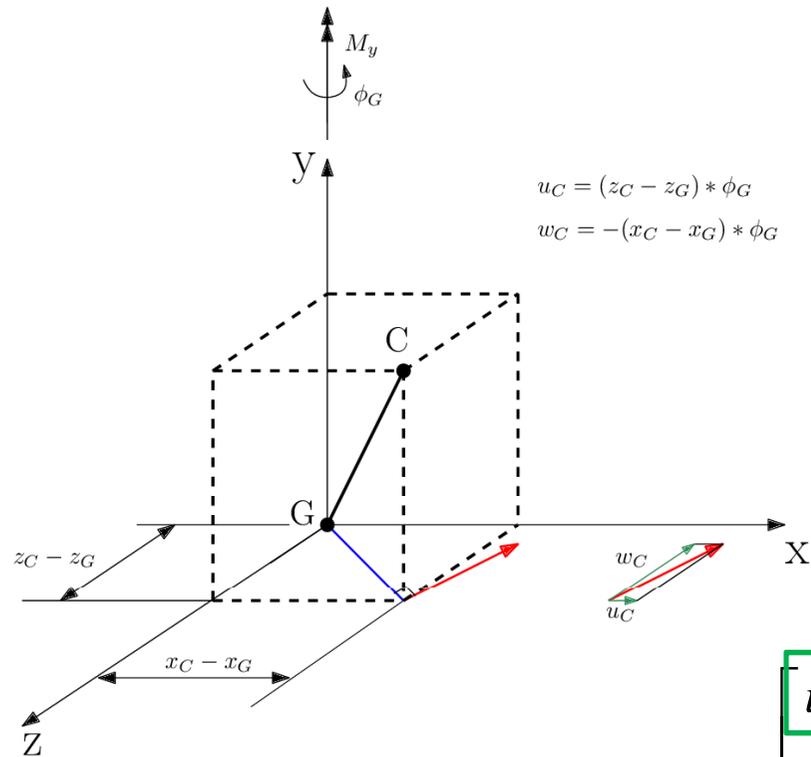
Contributo di una rotazione Φ_G in Y.

Hp) piccoli spostamenti (rotazioni) $\rightarrow \Phi_G \approx 1$ rad.



Componente Z equiversa al versore $k \rightarrow$ contributo NEGATIVO

Contributo di una rotazione Φ_G in Y.

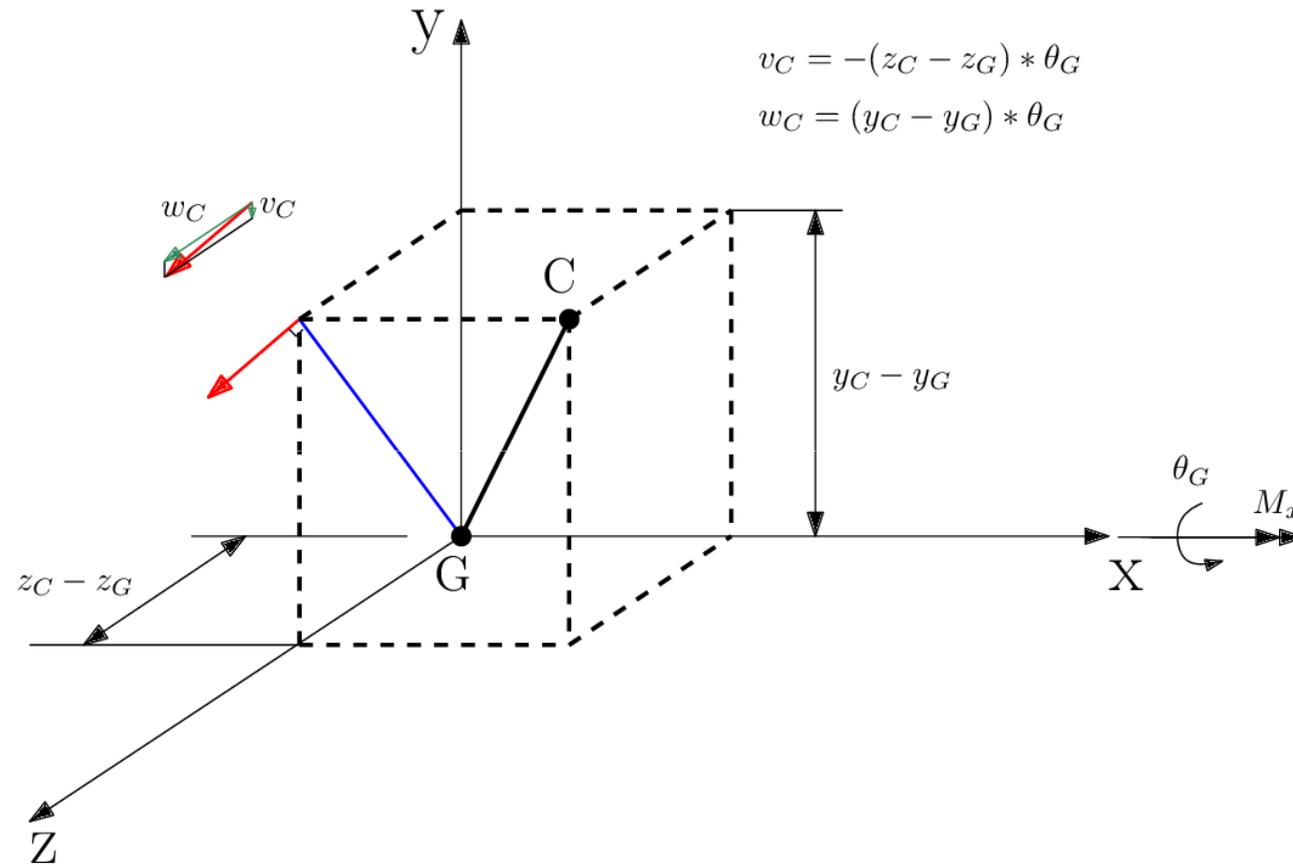


$$\begin{bmatrix} u_C \\ v_C \\ w_C \\ \theta_C \\ \phi_C \\ \psi_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & ? & (z_C - z_G) & ? \\ 0 & 1 & 0 & ? & 0 & ? \\ 0 & 0 & 1 & ? & -(x_C - x_G) & ? \\ 0 & 0 & 0 & ? & 0 & ? \\ 0 & 0 & 0 & ? & 0 & ? \\ 0 & 0 & 0 & ? & 0 & ? \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_G \\ v_G \\ w_G \\ \theta_G \\ \phi_G \\ \psi_G \end{bmatrix}$$

Hp) piccoli spostamenti (rotazioni) $\rightarrow \Phi_G \approx 1$ rad.

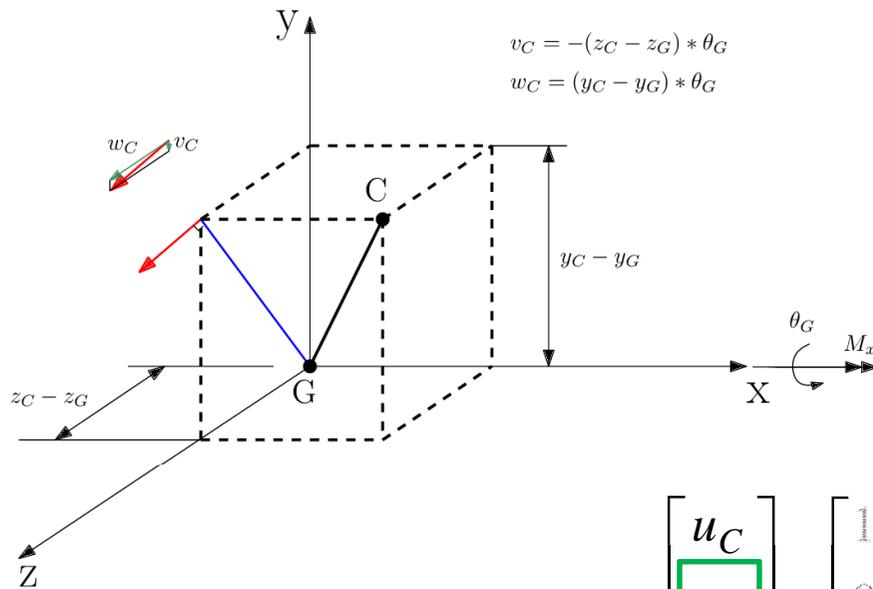
Contributo di una rotazione θ_G in X.

Hp) piccoli spostamenti (rotazioni) $\rightarrow \theta_G \approx 1$ rad.



Componente Y equiversa al versore j \rightarrow contributo NEGATIVO

Contributo di una rotazione θ_G in X.

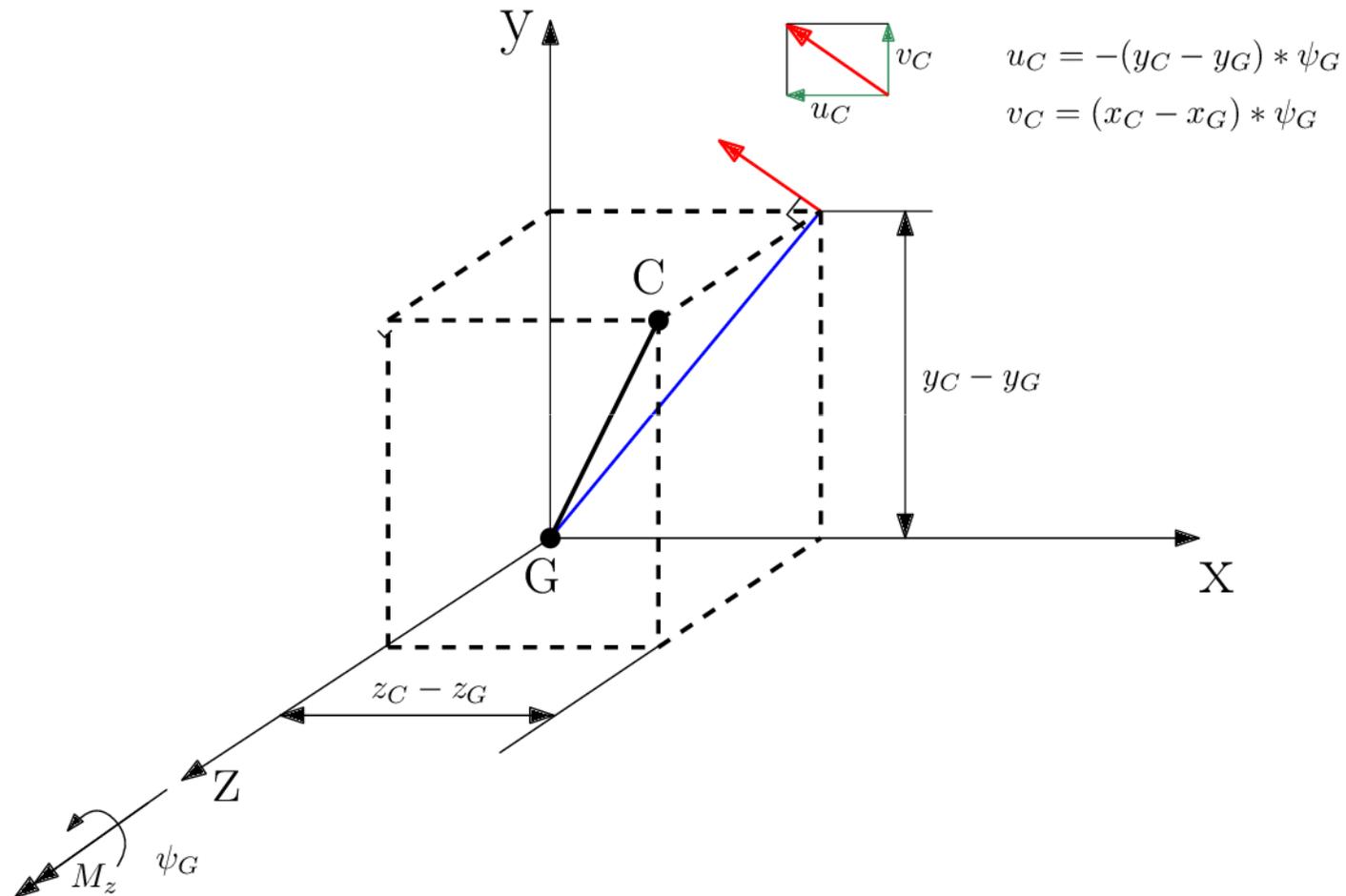


$$\begin{bmatrix} u_C \\ v_C \\ w_C \\ \theta_C \\ \phi_C \\ \psi_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & (z_C - z_G) & ? \\ 0 & 1 & 0 & -(z_C - z_G) & 0 & ? \\ 0 & 0 & 1 & (y_C - y_G) & -(x_C - x_G) & ? \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ? \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ? \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ? \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_G \\ v_G \\ w_G \\ \theta_G \\ \phi_G \\ \psi_G \end{bmatrix}$$

Hp) piccoli spostamenti (rotazioni) $\rightarrow \theta_G \approx 1$ rad.

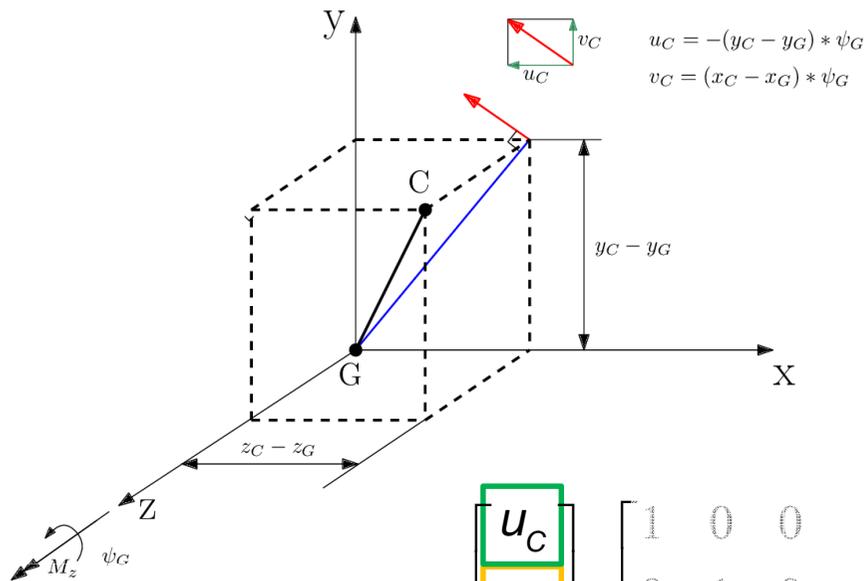
Contributo di una rotazione ψ_G in Z.

Hp) piccoli spostamenti (rotazioni) $\rightarrow \psi_G \approx 1$ rad.



Componente X equivale al versore $i \rightarrow$ contributo NEGATIVO

Contributo di una rotazione ψ_G in Z.



$$\begin{bmatrix} u_C \\ v_C \\ w_C \\ \theta_C \\ \phi_C \\ \psi_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & (z_C - z_G) & -(y_C - y_G) \\ 0 & 1 & 0 & -(z_C - z_G) & 0 & (x_C - x_G) \\ 0 & 0 & 1 & (y_C - y_G) & -(x_C - x_G) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_G \\ v_G \\ w_G \\ \theta_G \\ \phi_G \\ \psi_G \end{bmatrix}$$

Hp) piccoli spostamenti (rotazioni) $\rightarrow \psi_G \approx 1$ rad.

$$\begin{bmatrix} u_C \\ v_C \\ w_C \\ \theta_C \\ \phi_C \\ \psi_C \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & +(z_C - z_G) & -(y_C - y_G) \\ 0 & 1 & 0 & -(z_C - z_G) & 0 & +(x_C - x_G) \\ 0 & 0 & 1 & +(y_C - y_G) & -(x_C - x_G) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{L_{CG}}}} \cdot \begin{bmatrix} u_G \\ v_G \\ w_G \\ \theta_G \\ \phi_G \\ \psi_G \end{bmatrix}$$

RELAZIONE 1: legame cinematico tra il nodo di controllo C e il baricentro G.

Per l'imposizione del legame cinematico tra il nodo di controllo C ed il nodo baricentrico G, e' associata al nodo G l'applicazione delle sollecitazioni agenti in C mediante l'introduzione di opportuni momenti di trasporto (Teorema di Huyghens)

$$\underline{F}_C = [U_C \quad V_C \quad W_C \quad \Omega_C \quad \Phi_C \quad \Psi_C]^T$$

Vettore delle componenti di sollecitazione agenti in C

$$\underline{F}_G = [U_G \quad V_G \quad W_G \quad \Omega_G \quad \Phi_G \quad \Psi_G]^T$$

Vettore delle componenti di sollecitazione agenti in G

$$\underline{F}_G = [\underline{L}_{CG}]^T \cdot \underline{F}_C$$

LEGAME ALLE FORZE

$$x_G = \frac{\sum_i q_i x_i}{\sum_i q_i} \quad y_G = \frac{\sum_i q_i y_i}{\sum_i q_i} \quad z_G = \frac{\sum_i q_i z_i}{\sum_i q_i}$$

Lo **posizione** del baricentro G e' definibile dalla media pesata q_i delle **posizioni** dei nodi i indipendenti

$$u_G = \frac{\sum_i q_i u_i}{\sum_i q_i} \quad v_G = \frac{\sum_i q_i v_i}{\sum_i q_i} \quad w_G = \frac{\sum_i q_i w_i}{\sum_i q_i}$$

RELAZIONE 2: Lo **spostamento** del baricentro G e' definibile dalla media pesata q_i degli **spostamenti** dei nodi i indipendenti

→ LEGAME SPOSTAMENTI BARICENTRO (G) e NODI INDIPENDENTI PERIFERICI (i)

RELAZIONE 3: Le forze applicate in C e ridotte in G, si distribuiscono ai nodi indipendenti periferici i , secondo i pesi q_i dati, ossia

$$U'_i = U_C \frac{q_i}{\sum_i q_i} \quad V'_i = V_C \frac{q_i}{\sum_i q_i} \quad W'_i = W_C \frac{q_i}{\sum_i q_i}$$

→ LEGAME FORZE NODI INDIPENDENTI PERIFERICI (i) e FORZE APPLICATE AL NODO DI CONTROLLO (C).

RELAZIONE 4: per la riduzione delle forze applicate in C a G, e' necessario calcolare i MOMENTI di TRASPORTO, che verranno trattati come una quota aggiuntiva definita in termini di FORZE NODALI equivalenti (U_i'' , V_i'' , W_i'') anziche' quote momento (Ω_i'' , Φ_i'' , Ψ_i'') tal quale.

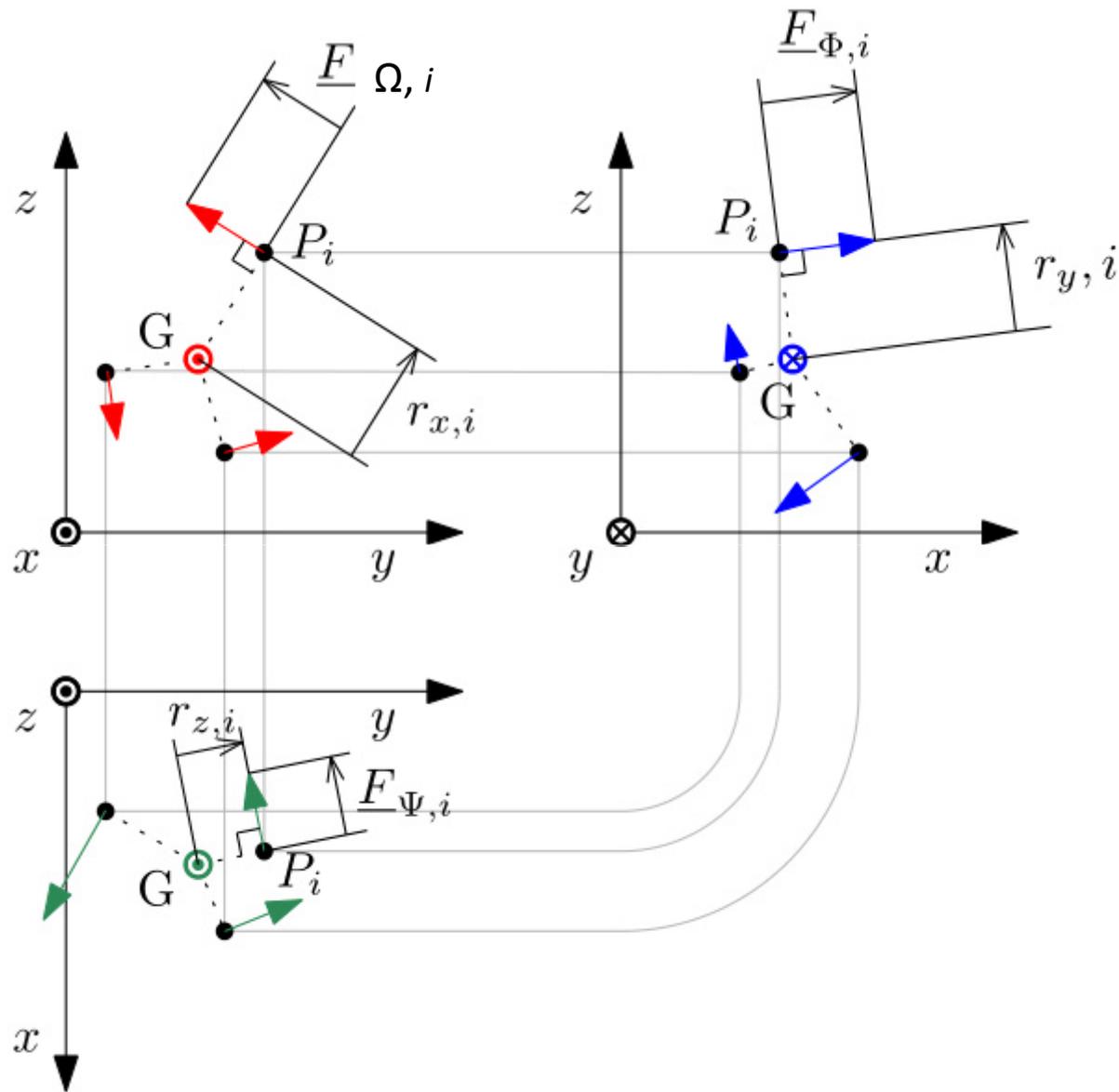
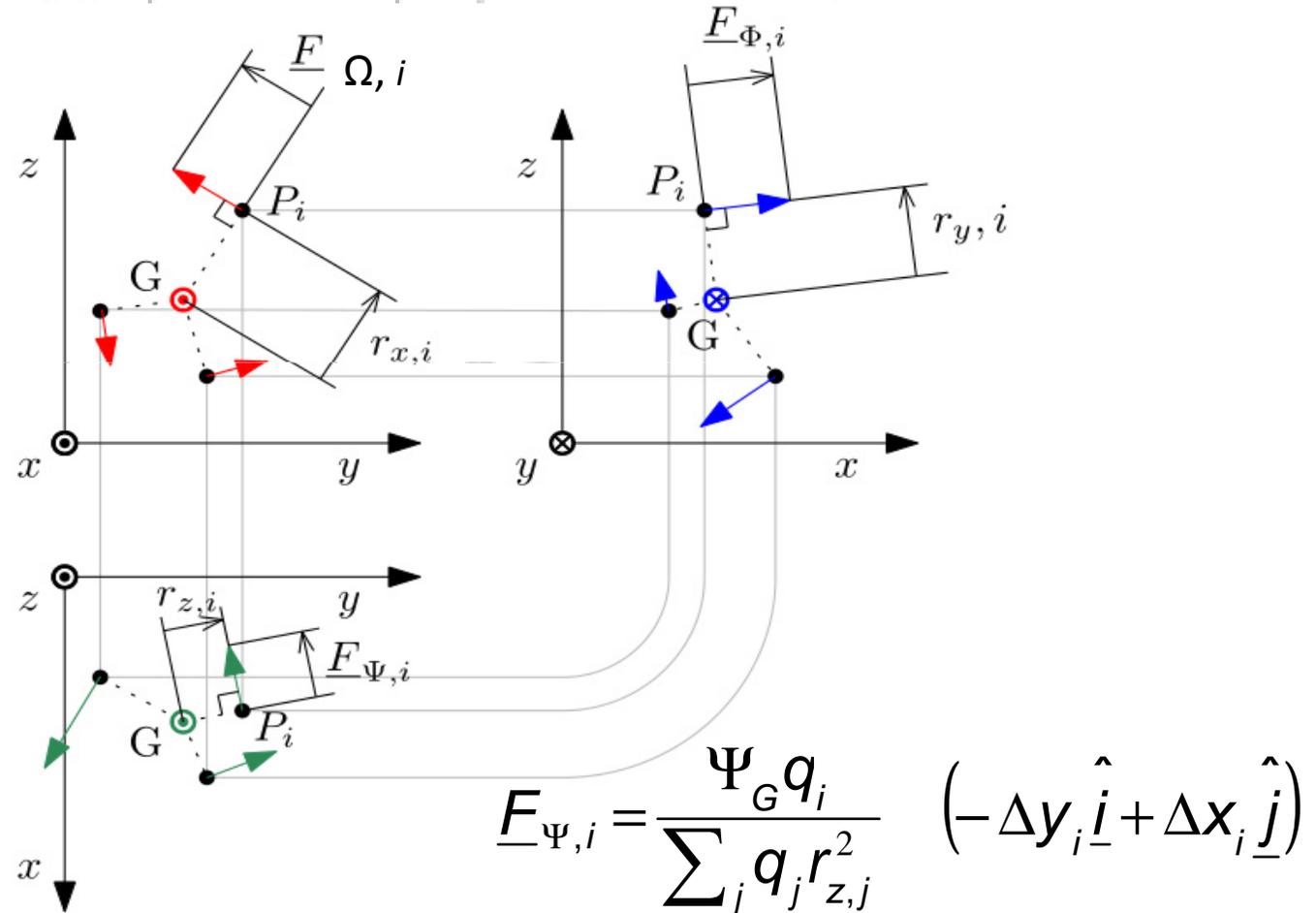


Figure 1: Schema distribuzione momenti

DIREZIONE: Retta d'azione di $F_{\Psi,i}$ è normale alla congiungente $G-P_i$ qui proiettata
 VERSO: coerente con il momento stesso
 MODULO: proporzionale alla distanza proiettata ed al peso q_i del nodo

→ $r_{z,i} = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$ con $\Delta x_i = x_i - x_G$ $\Delta y_i = y_i - y_G$



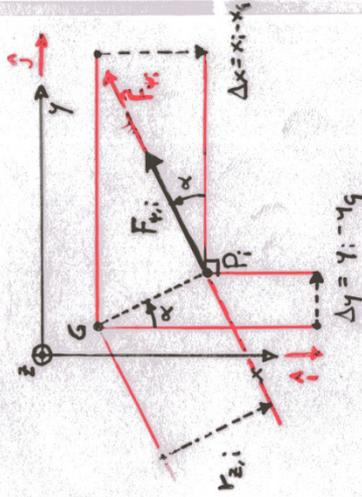
MOMENTO RESULTANTE della distribuzione pari a $\Psi_G k$ (k versore)

$$F_{\psi,i} = \lambda q_i r_{z,i} \hat{f}_{\psi,i}$$

↑ ↑ ↑
contributo
di FORZA

↑ ↑ ↑
associato a componenti
di momento (lungo z)

applicato al nodo i-esimo



$$\hat{f}_{\psi,i} = \langle \hat{f}_{\psi,i}, \hat{i} \rangle \hat{i} + \langle \hat{f}_{\psi,i}, \hat{j} \rangle \hat{j}$$

$$= \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \hat{i} + \cos\alpha \hat{j}$$

$$= -\sin\alpha \hat{i} + \cos\alpha \hat{j}$$

$$F_{\psi,i} = \lambda q_i r_{z,i} \left(-\frac{\Delta y_i}{r_{z,i}} \hat{i} + \frac{\Delta x_i}{r_{z,i}} \hat{j} \right)$$

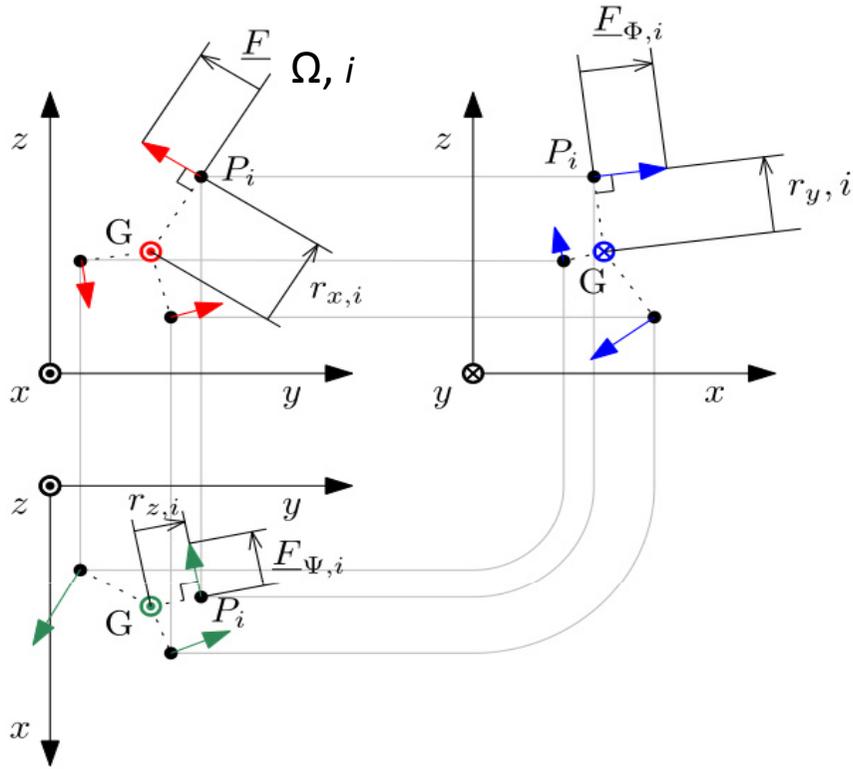
inoltre $\|F_{\psi,i}\| = \lambda q_i r_{z,i}$ e $F_{\psi,i} = \underbrace{\left(\Delta x_i, \Delta y_i, \phi \right)}_{b_z}$

cui il contributo di $F_{\psi,i}$ alla componente di

momento Ψ_G è $\lambda q_i r_{z,i} \|b_z\| = \lambda q_i r_{z,i}^2$

sumando sui nodi $j=1..N$ ho

$$\Psi_G = \sum_{j=1}^N \lambda q_j r_{z,j}^2 \rightarrow \lambda = \frac{\Psi_G}{\sum_{j=1}^N q_j r_{z,j}^2}$$



$$\underline{F}_{\Psi,i} = \frac{\Psi_G q_i}{\sum_j q_j r_{z,j}^2} \left(-\Delta y_i \hat{i} + \Delta x_i \hat{j} \right)$$

$$\underline{F}_{\Omega,i} = \frac{\Omega_G q_i}{\sum_j q_j r_{x,j}^2} \left(-\Delta z_i \hat{j} + \Delta y_i \hat{k} \right)$$

$$\underline{F}_{\Phi,i} = \frac{\Phi_G q_i}{\sum_j q_j r_{y,j}^2} \left(-\Delta x_i \hat{k} + \Delta z_i \hat{i} \right)$$

$$U''_i \hat{i} + V''_j \hat{j} + W''_k \hat{k} = q_i \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\Omega_G}{\sum_j q_j r_{x,j}^2} & \frac{\Phi_G}{\sum_j q_j r_{y,j}^2} & \frac{\Psi_G}{\sum_j q_j r_{z,j}^2} \\ \Delta x_i & \Delta y_i & \Delta z_i \end{bmatrix}$$

I termini in quest'ultima equazione andranno poi sommati i contributi delle forze applicate in C e ridotte a G distribuite sull' i -esimo nodo P_i . Per cui la forza distribuita dal link RBE3 sull' i -esimo nodo risulterà

$$\underline{F}_i = U_i \hat{i} + V_j \hat{j} + W_k \hat{k} = (U'_i + U''_i) \hat{i} + (V'_i + V''_i) \hat{j} + (W'_i + W''_i) \hat{k}$$

$$U'_i = U_C \frac{q_i}{\sum_i q_i} \quad V'_i = V_C \frac{q_i}{\sum_i q_i} \quad W'_i = W_C \frac{q_i}{\sum_i q_i}$$

$$U''_i \hat{i} + V''_j \hat{j} + W''_k \hat{k} = q_i \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\Omega_G}{\sum_j q_j r^2_{x,j}} & \frac{\Phi_G}{\sum_j q_j r^2_{y,j}} & \frac{\Psi_G}{\sum_j q_j r^2_{z,j}} \\ \Delta x_i & \Delta y_i & \Delta z_i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} U_i \\ V_i \\ W_i \\ \Omega_i \\ \Phi_i \\ \Psi_i \end{bmatrix} = q_i \begin{bmatrix} \frac{1}{\sum_j q_j} & 0 & 0 & 0 & + \frac{\Delta z_i}{\sum_j q_j r^2_{y,j}} & - \frac{\Delta y_i}{\sum_j q_j r^2_{z,j}} \\ 0 & \frac{1}{\sum_j q_j} & 0 & - \frac{\Delta z_i}{\sum_j q_j r^2_{x,j}} & 0 & + \frac{\Delta x_i}{\sum_j q_j r^2_{z,j}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sum_j q_j} & + \frac{\Delta y_i}{\sum_j q_j r^2_{x,j}} & - \frac{\Delta x_i}{\sum_j q_j r^2_{y,j}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_G \\ V_G \\ W_G \\ \Omega_G \\ \Phi_G \\ \Psi_G \end{bmatrix}$$

Vettore delle componenti di sollecitazione agenti ad ogni nodo indipendente i

Vettore delle componenti di sollecitazione agenti nel centro di massa G

$$\underline{F}_i = q_i \begin{bmatrix} \frac{1}{\sum_j q_j} & 0 & 0 & 0 & +\frac{\Delta z_i}{\sum_j q_j r^2_{y,j}} & -\frac{\Delta y_i}{\sum_j q_j r^2_{z,j}} \\ 0 & \frac{1}{\sum_j q_j} & 0 & -\frac{\Delta z_i}{\sum_j q_j r^2_{x,j}} & 0 & +\frac{\Delta x_i}{\sum_j q_j r^2_{z,j}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sum_j q_j} & +\frac{\Delta y_i}{\sum_j q_j r^2_{x,j}} & -\frac{\Delta x_i}{\sum_j q_j r^2_{y,j}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L \\ =GP_i \end{bmatrix}^T = \underline{F}_G$$

$$\underline{F}_C = [U_C \quad V_C \quad W_C \quad \Omega_C \quad \Phi_C \quad \Psi_C]^T$$

Vettore delle componenti di sollecitazione agenti in C

Ricordando la relazione cinematica tra lo spostamento del baricentro G ed i nodi di controllo C

$$\begin{matrix} \begin{bmatrix} u_C \\ v_C \\ w_C \\ \theta_C \\ \phi_C \\ \psi_C \end{bmatrix} \\ \delta_C \end{matrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & +(z_C - z_G) & -(y_C - y_G) \\ 0 & 1 & 0 & -(z_C - z_G) & 0 & +(x_C - x_G) \\ 0 & 0 & 1 & +(y_C - y_G) & -(x_C - x_G) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{L}_{CG}} \cdot \begin{matrix} \begin{bmatrix} u_G \\ v_G \\ w_G \\ \theta_G \\ \phi_G \\ \psi_G \end{bmatrix} \\ \delta_G \end{matrix}$$

Ricordando che alla distribuzione di forze è associata la forma agli spostamenti allora è
POSSIBILE ESPRIMERE IL LINK RBE3 mediante una CONDIZIONE CINEMATICA :

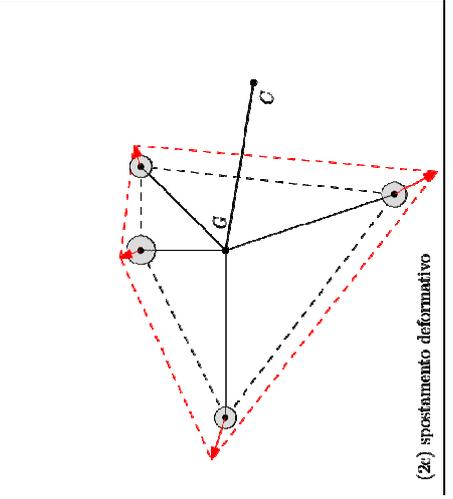
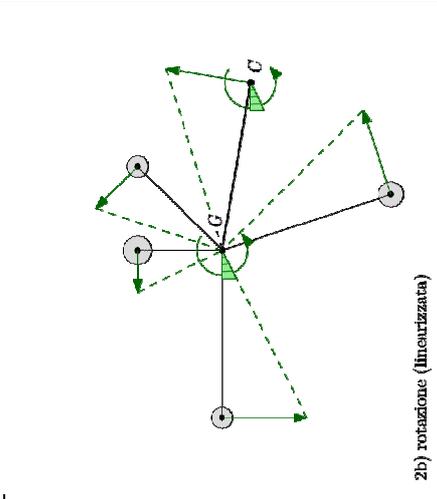
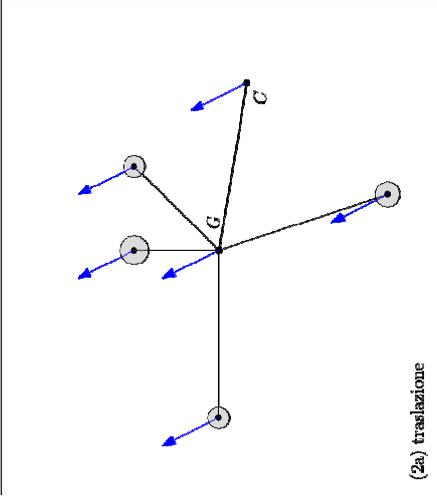
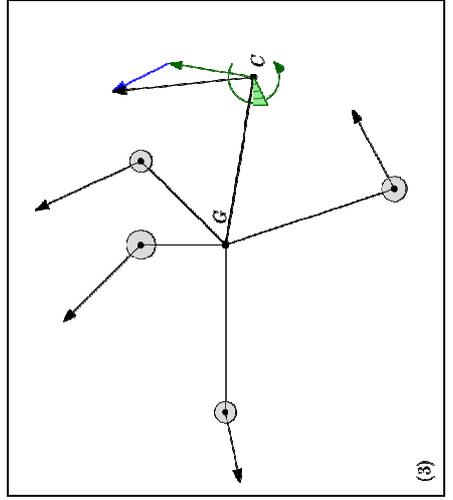
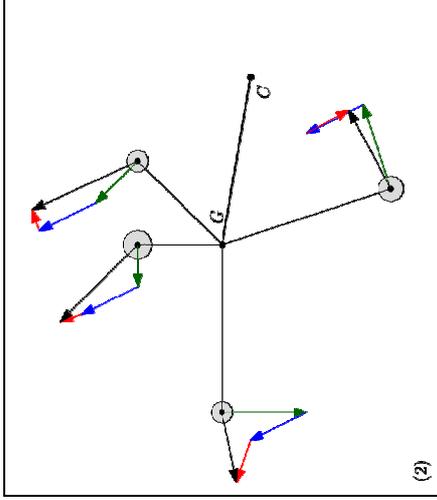
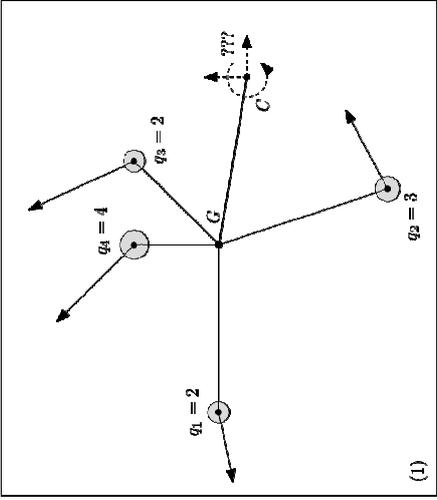
$$\underline{\delta}_G = [\underline{L}_{GP,1} \cdots \underline{L}_{GP,i} \cdots \underline{L}_{GP,n}] \begin{bmatrix} \underline{\delta}_1 \\ \vdots \\ \underline{\delta}_i \\ \vdots \\ \underline{\delta}_n \end{bmatrix}^T \quad \underline{\delta}_C = [\underline{L}_{CG}] \cdot [\underline{L}_{GP}] \underline{\delta}_{\forall i}$$

POSSIBILE ESPRIMERE IL LINK RBE3 mediante una CARATTERISTICA
DI DISTRIBUZIONE DELLE FORZE AI NODI P_i

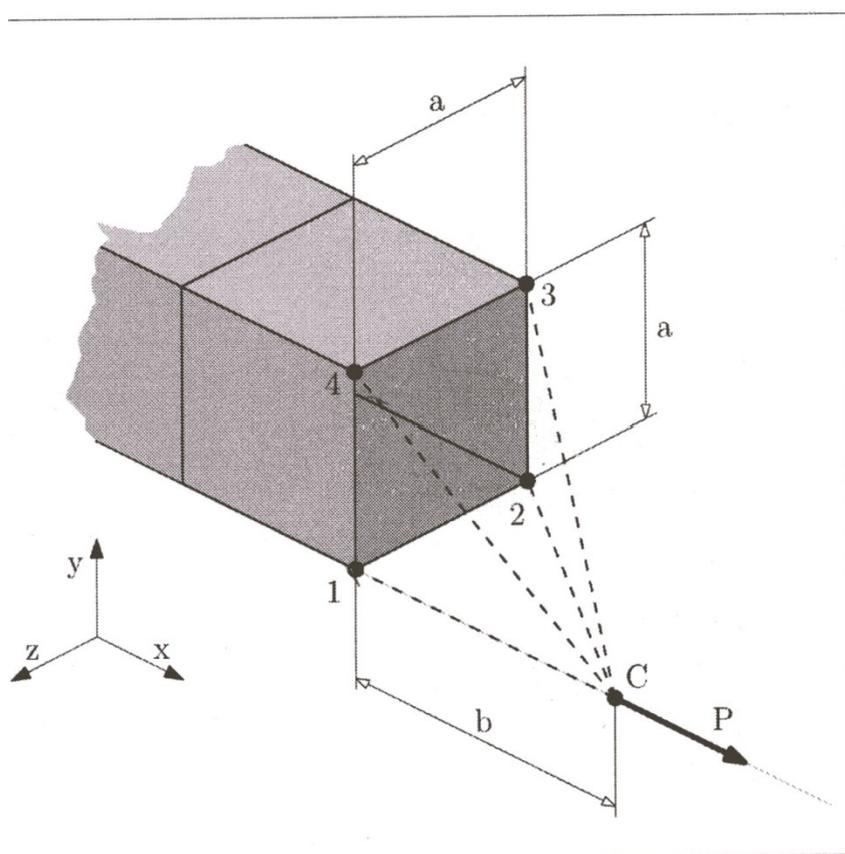
$$\underline{F}_G = \left[\underline{L}_{CG} \right]^T \cdot \underline{F}_C$$

$$\underline{F}_i = \left[\underline{L}_{GP_i} \right]^T \cdot \underline{F}_G$$

$$\underline{F}_i = \left[\underline{L}_{GP_i} \right]^T \cdot \left[\underline{L}_{CG} \right]^T \cdot \underline{F}_C$$



Esempio



The diagram shows a rectangular prism with nodes 1, 2, 3, and 4. Node 1 is at the bottom-left-front corner, node 2 is at the bottom-right-front corner, node 3 is at the top-right-back corner, and node 4 is at the top-left-back corner. A force P is applied at point C , which is located at the bottom-right-back corner of the prism's base. The distance from node 1 to point C along the x -axis is b . The distance from node 1 to node 3 along the y -axis is a . The distance from node 1 to node 2 along the z -axis is also a . A 3D coordinate system is shown with y pointing up, x pointing right, and z pointing down.

nodo	peso	forza nodale trasmessa
1	1.0	F1x = F1y = F1z =
2	1.0	F2x = F2y = F2z =
3	1.0	F3x = F3y = F3z =
4	1.0	F4x = F4y = F4z =

- Determino la posizione del centro di massa G ($a/2, a/2$)
- Ripartisco equamente il carico applicato → TRASLAZIONE

$$F (P_i) = F_1 X = F_2 X = F_3 X = F_4 X = P/4$$

- Calcolo le componenti di trasporto (2 TRASLAZIONI → 2 MOMENTI)

ATTENZIONE AI SEGNI