



# Materiali Compositi

Ing. A. Baldini e Ing. E. Dolcini

# Argomenti della lezione

- Cosa sono i materiali compositi
- Caratteristiche del rinforzo
- Caratteristiche della matrice
- Principi di tecnologia dei materiali compositi
- Cenni di calcolo
- Criteri di resistenza

# Cosa sono i materiali compositi?

## ■ **Definizione:**

Materiale costituito da 2 o più fasi (componenti) tali che :

- 1) Abbiamo chiara superficie di interfaccia su scala macroscopica
- 2) Siano chimicamente distinti
- 3) Abbiamo caratteristiche fisico-meccaniche significativamente diverse

## • **Esempi:**

- ✓ Calcestruzzo (pietrisco + cemento )
- ✓ Cemento armato ( calcestruzzo + tondini d'acciaio)
- ✓ Legno (fibra di cellulosa in una matrice legnosa )
- ✓ Ossa dei vertebrati

# Principali Materiali compositi nelle Costruzioni meccaniche

## ■ **Compositi Bicomponenti**

Rinforzo: elemento più resistente; presente in fase discontinua ( fibre o particelle )

Matrice: elemento meno resistente; presente in fase continua

*Il composito ha proprietà meccaniche  
sensibilmente differenti da quelle di matrice e rinforzo  
presi singolarmente*

# Proprietà dei Materiali compositi bicomponente

Le proprietà fisico-meccaniche dei materiali compositi dipendono da:

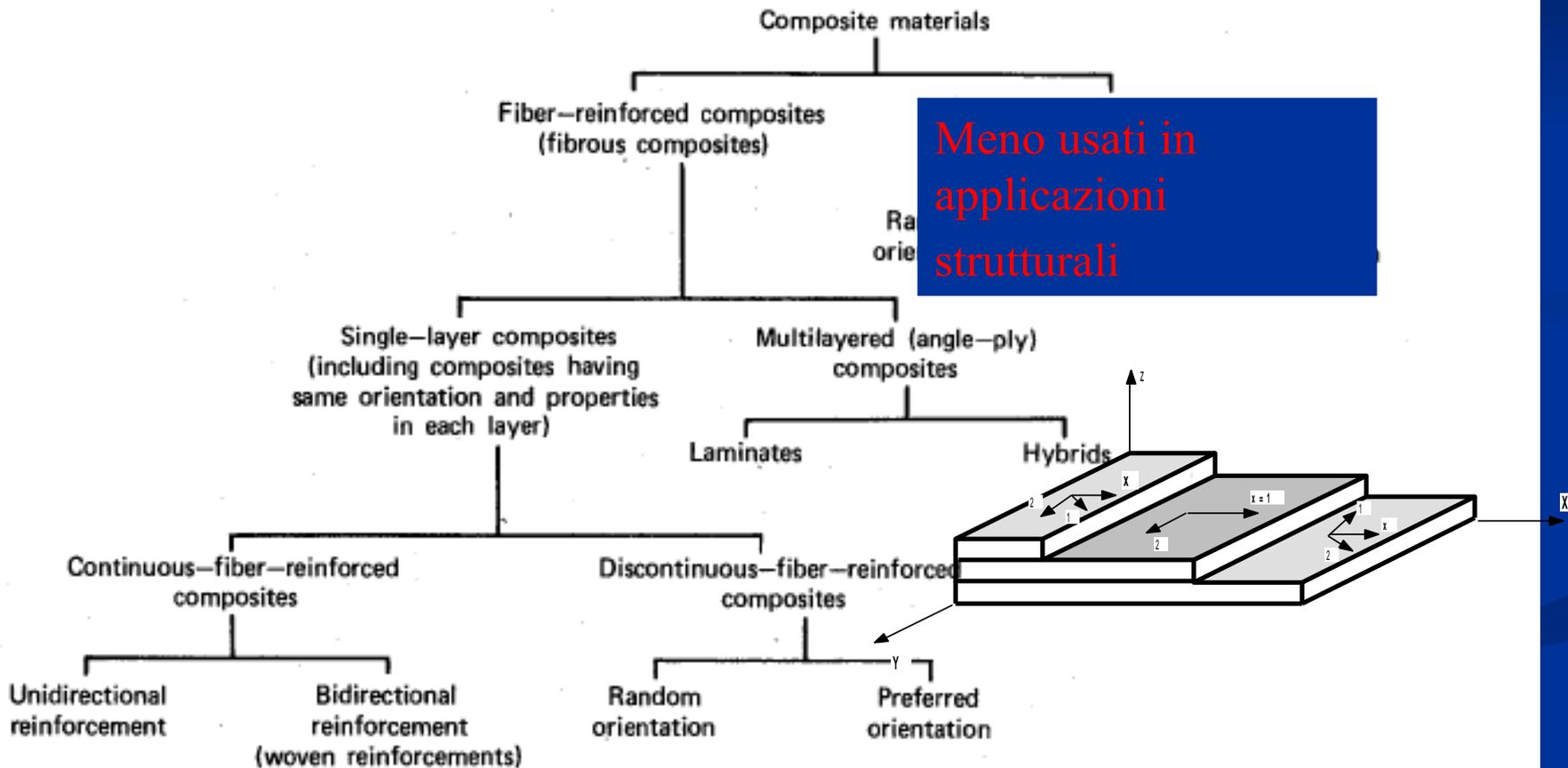
- 1) Proprietà di rinforzo e matrice
- 2) Concentrazione di rinforzo e matrice
- 3) Forma del rinforzo ( fibre, particelle )
- 4) Dimensione del rinforzo
- 5) Distribuzione del rinforzo
- 6) Orientamento del rinforzo all'interno della matrice (unidirezionali, bidirezionali...)
- 7) Interazione rinforzo-matrice

Il progettista ha a disposizione diversi parametri su cui intervenire:

I compositi sono “**materiali da progettare**”



# Classificazione dei materiali compositi

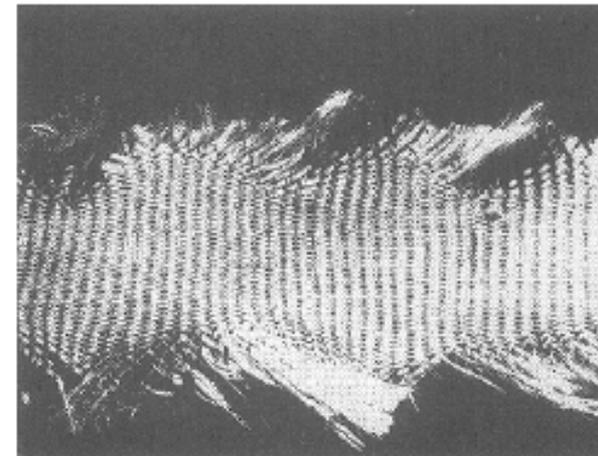
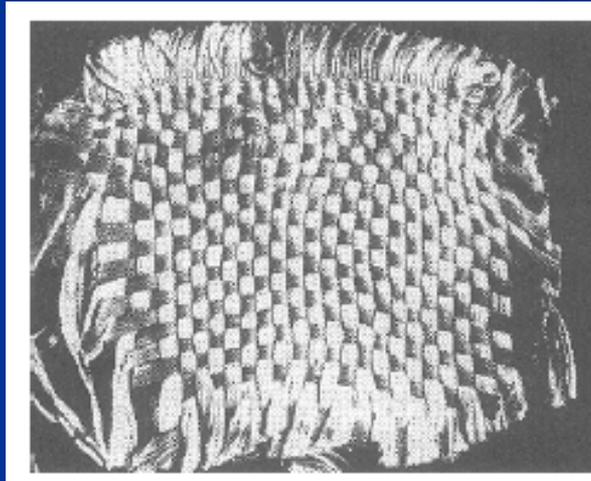


# Materiali Compositi Fibrosi

- Materiali a **Fibre lunghe o continue** (lunghezza fibra confrontabile con quella del manufatto ).

**Lamine** unidirezionali e multilayer

**Tessuti:** trama e ordito



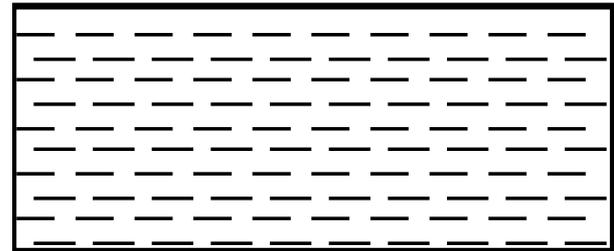
# Materiali Compositi Fibrosi

- Materiali a **Fibre corte o discontinue** (lunghezza fibra tra 1 e 8 cm circa ).

1) Con orientamento casuale



2) Con orientamento preferenziale



# Caratteristiche delle Fibre

Costituiscono l'**elemento strutturale** al quale è demandata la resistenza alle sollecitazioni

## Proprietà:

- Elevato rapporto rigidità/peso
- Elevato rapporto carico di rottura/peso

*A cosa è dovuta la grande efficienza meccanica delle fibre?*



**Effetto “scala”**

(diametri compresi tra 10 e 100 micron)

# Caratteristiche delle Fibre

Principali tipi di fibre:

- 1. Vetro**
- 2. Carbonio**
- 3. Aramidica ( Kevlar )**

# Caratteristiche delle Fibre

## ■ Fibre di Vetro

Carico di rottura tra 2500-4800 MPa

Modulo di Young tra 72000-90000 MPa

Basso costo

Densità circa 2.5 g/cc

Resistenza a elevate T (500-1000 C°)

Tipo E: caratterizzata da bassa conducibilità

Tipo S: caratterizzata da elevata resistenza

Tipo R: caratterizzata da resistenza maggiore delle precedenti (meno diffuse)

# Caratteristiche delle Fibre

## ■ Fibre Aramidiche

Carico di rottura tra 3000-3800 MPa

Modulo di Young tra 60000-180000 MPa

Elevata resistenza all'urto

Trasparenza alle onde elettromagnetiche ( usata nei radar)

Peso specifico metà di quello del vetro

Bassa resistenza a T (max 160 C°)

Elevata sensibilità all'umidità

Limitata resistenza a compressione

*In commercio dagli anni '70 è adatta per elmetti, caschi, giubbotti antiproiettile  
Caratterizzata da color giallo oro*

# Caratteristiche delle Fibre

## ■ Fibre di Carbonio

Carico di rottura tra 3500-4800 MPa

Modulo di Young tra 240000-390000 MPa ( circa 5 volte quella di vetro )

Elevata conducibilità termica ed elettrica

Densità circa 1.8 g/cc

Ottima resistenza alla corrosione

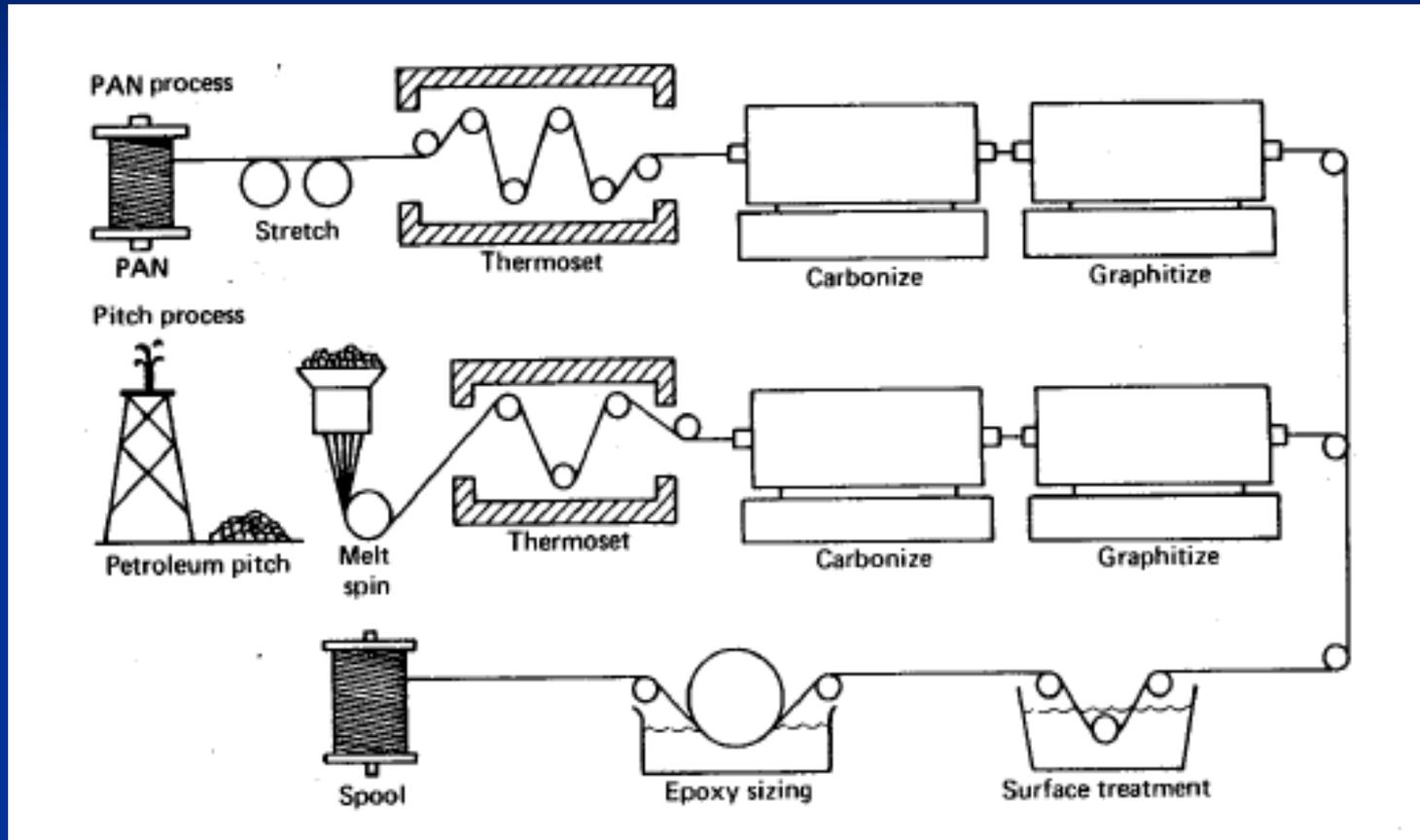
Facile infiammabilità

Elevato potenziale elettrolitico (attenzione alle giunzioni con Al)

*Molto utilizzate in campo aeronautico, in campo sportivo (racchette da tennis, sci), scocca vetture F1*

# Caratteristiche delle Fibre

- **Processo di fabbricazione fibra di carbonio: PIROLISI a partire da precursori organici**



PITCH: Miscela di idrocarburi

PAN: Poliacrilonitrile (polimero organico)

# Caratteristiche della Matrice

## Funzioni della matrice:

- Tenere insieme le fibre
- Trasmettere il carico
- Proteggere le fibre da azioni di taglio
- Proteggere le fibre da agenti atmosferici e corrosivi

## Proprietà richieste alla matrice:

- Buone caratteristiche meccaniche
- Resistenza alla corrosione ed agli agenti atmosferici
- Resistenza allo scorrimento fibra-matrice
- Elevata Tenacità

# Caratteristiche della Matrice

## TIPI DI MATRICE:

Metallica (MMC)

Ceramica (CMC)

Polimerica (PMC)

Termoplastiche

Macromolecole lineari o ramificate →  
fondono

con l'apporto di calore: possono essere ri-fusi

<sup>e</sup>Termoindurenti  
ri-stampati

Macromolecole reticolata → non possono  
essere ri-fusi e ri-formati. Eseguita la  
reticolazione si ha una forma definitiva

# Caratteristiche della Matrice

## MATRICE POLIMERICHE:

Termoplastiche → Elevata resistenza all'urto  
Adatta ad applicazioni criogeniche  
Buona resistenza all'umidità

Elevata Viscosità → DIFFICOLTA'  
AD IMPREGNARE  
LE FIBRE

Es.

PEEK (polyether etherketone)

# Caratteristiche della Matrice

## MATRICE POLIMERICHE:

Termoindurenti → Bassa Viscosità → BUONA IMPREGNAZIONE  
DELLE FIBRE

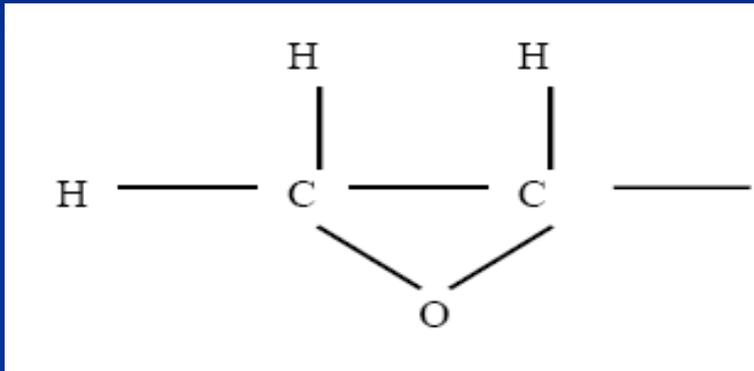
Facilità di formazione di complesse catene  
polimeriche spaziali

Es.

- Resine epossidiche → { Buon legame fibra-matrice  
Basso ritiro  
Buona resistenza a frattura  
Buona resistenza a corrosione/umidità
- Resine poliestere → Economiche
- Resine fenoliche → Miglior resistenza alle alte temperature

# Caratteristiche della Matrice

## PROCESSO DI POLIMERIZZAZIONE:

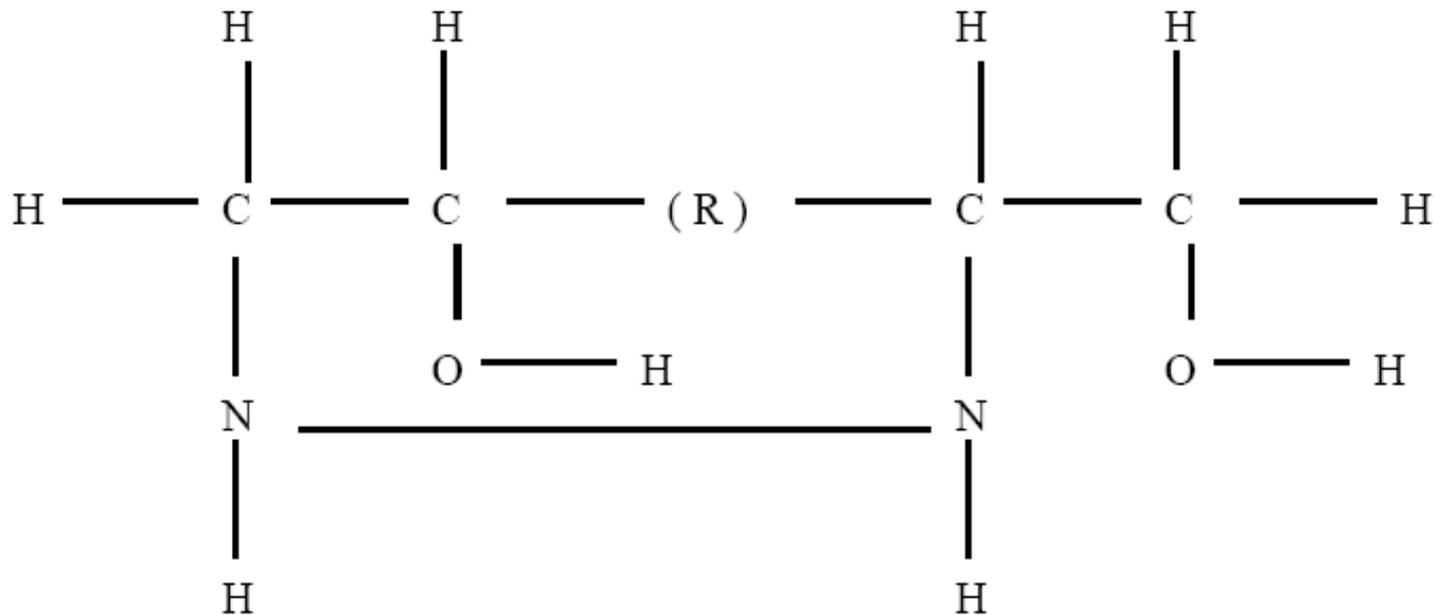


Monomero (Es. Gruppo Epossidico)

↑  
Induritore: radicale che presenta all'estremità un atomo di N  
(Es. anidridi , amino derivati)

# Caratteristiche della Matrice

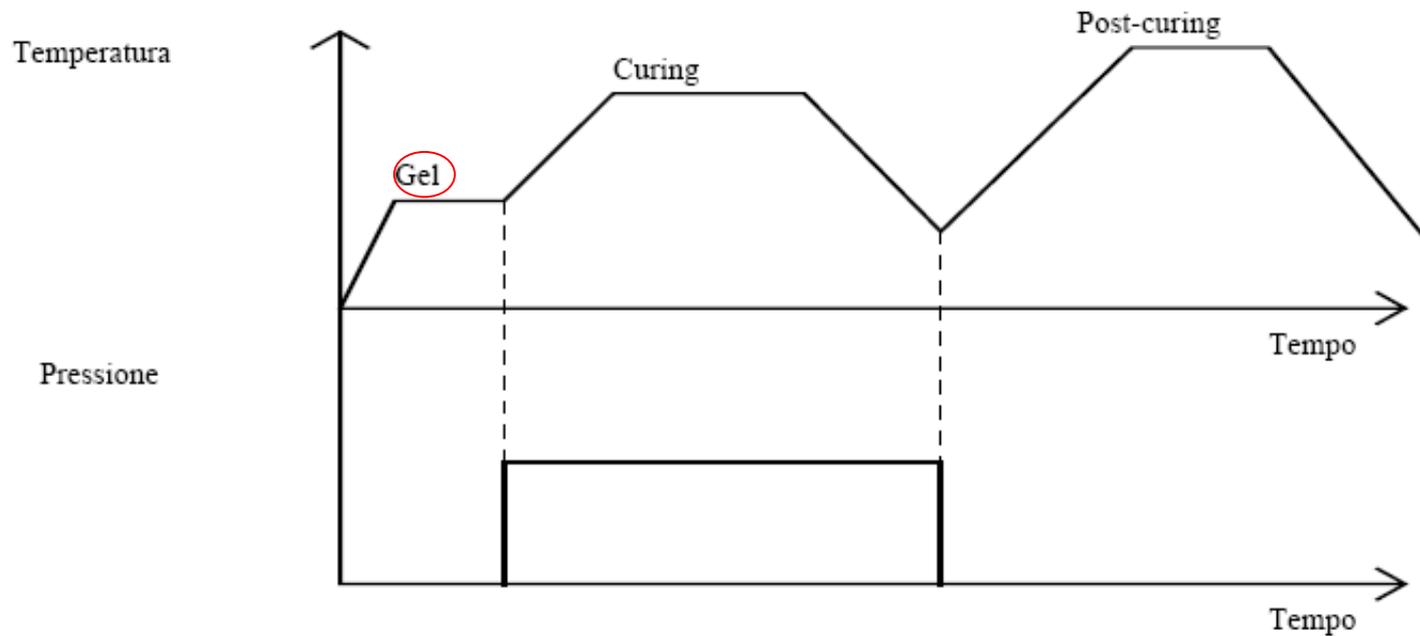
## PROCESSO DI POLIMERIZZAZIONE:



Polimero della resina epossidica

# Caratteristiche della Matrice

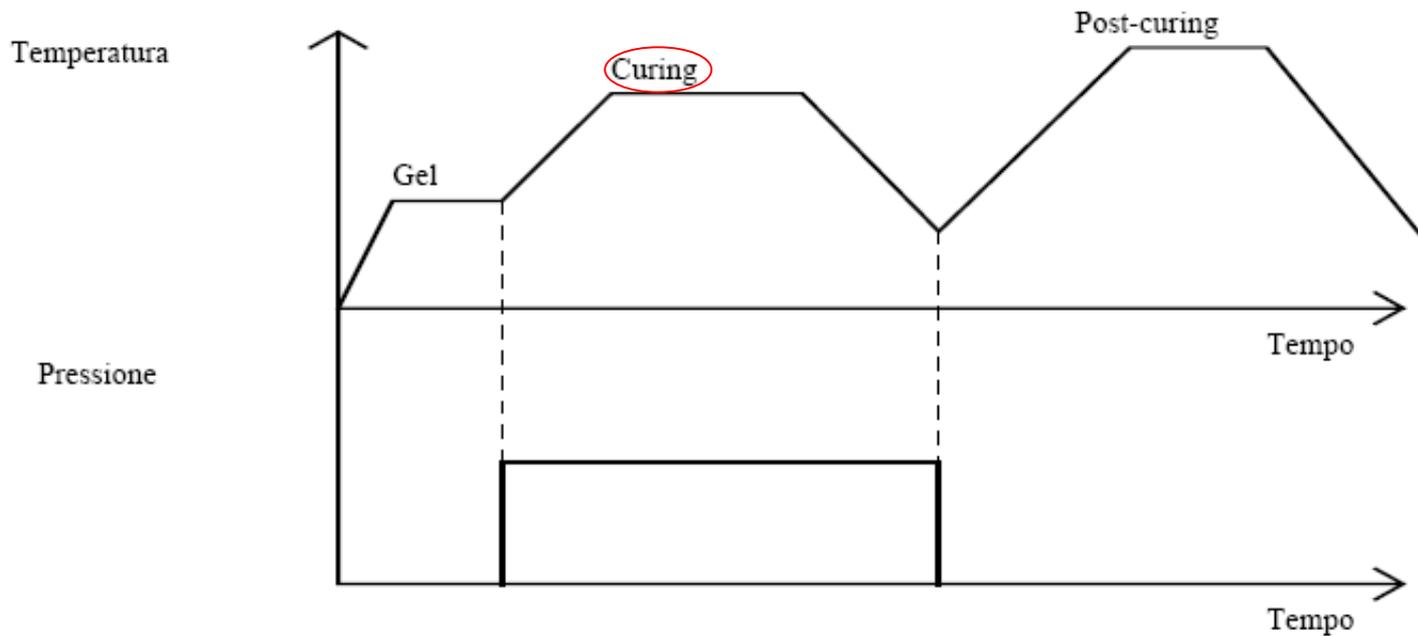
## PROCESSO DI POLIMERIZZAZIONE:



1) Gelificazione: polimerizzazione del 70% della matrice

# Caratteristiche della Matrice

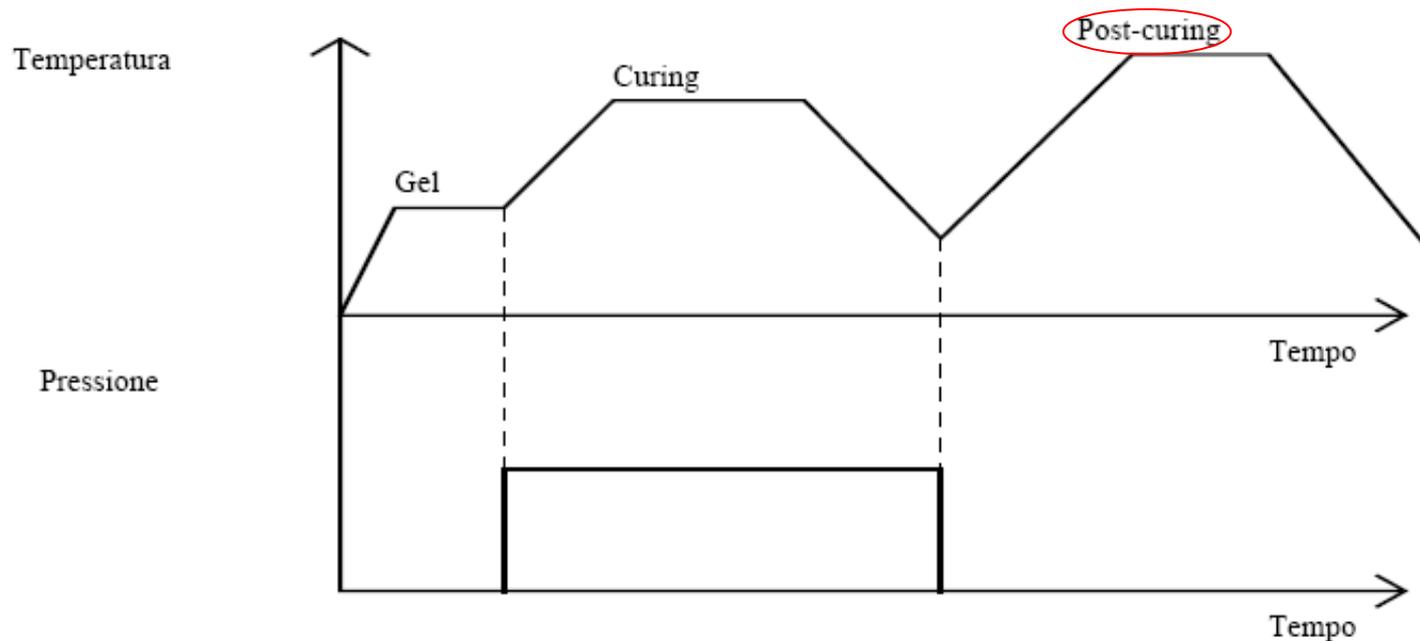
## PROCESSO DI POLIMERIZZAZIONE:



- 2) Cura: Incremento della compattezza e del legame fibra matrice  
Riduzione delle tensioni residue dovute a ritiro differente tra fibra e matrice

# Caratteristiche della Matrice

## PROCESSO DI POLIMERIZZAZIONE:



- 3) Post Cura: ulteriore indurimento della matrice e riduzione delle tensioni residue  
aumento della  $T$  transizione vetrosa ( $T_{critica}$ )

# Metodi di Fabbricazione

## ■ Laminazione con prepregs + cura in autoclave:

Buon controllo del rapporto fibra/matrice

Distribuzione omogenea della resina all'interno del laminato

Bassa percentuale di vuoti (<0,5 %)

Possibilità di realizzare forme molto complesse

**OSS.**

*Non è l'unica tecnologia di produzione di manufatti in composito:*

RTM (resin transfer moulding)

VARTM (vaacum resin transfer moulding)

Filament winding

Pultrusione

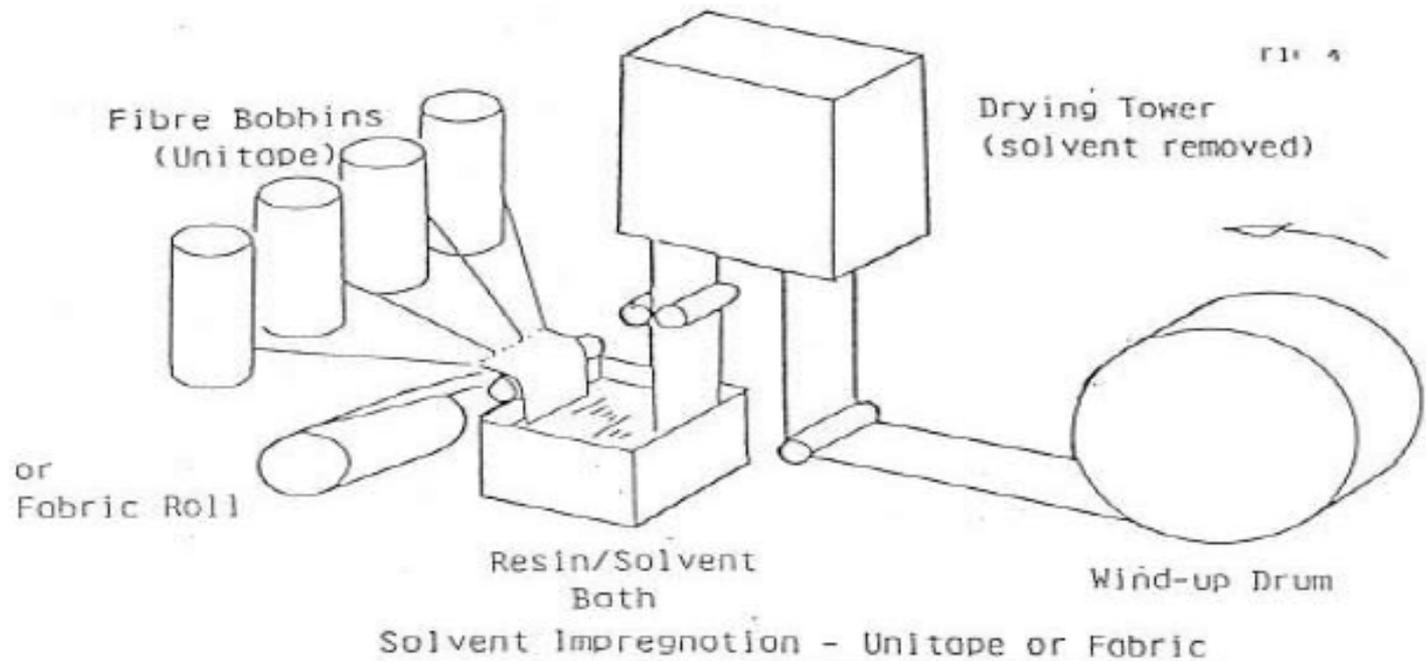
# Metodi di Fabbricazione

- **Autoclave:** forno in cui è possibile controllare temperatura e pressione



# Metodi di Fabbricazione

**Prepregs:** Lamine di spessore nell'ordine di qualche decimo di mm, costituite da fibre impregnate di resina (rinforzo unidirezionale o sotto forma di tessuto)



# Metodi di Fabbricazione

## Stratificazione (Lay-up) in camera pulita (clean room)

1. Estrazione dai freezer di stoccaggio e permanenza negli imballaggi per circa 24 h fino al raggiungimento della temperatura ambiente
2. Taglio
  - Manuale
  - Automatico
  - Fiber placement machine (taglio e stratificazione simultanea)
3. Stratificazione su stampi (tools)
4. Applicazione del “sacco a vuoto” (vacuum bag) -  
compattazione preliminare delle lamine ed eliminazione  
aria
5. Ciclo di Cura e Post Cura in autoclave

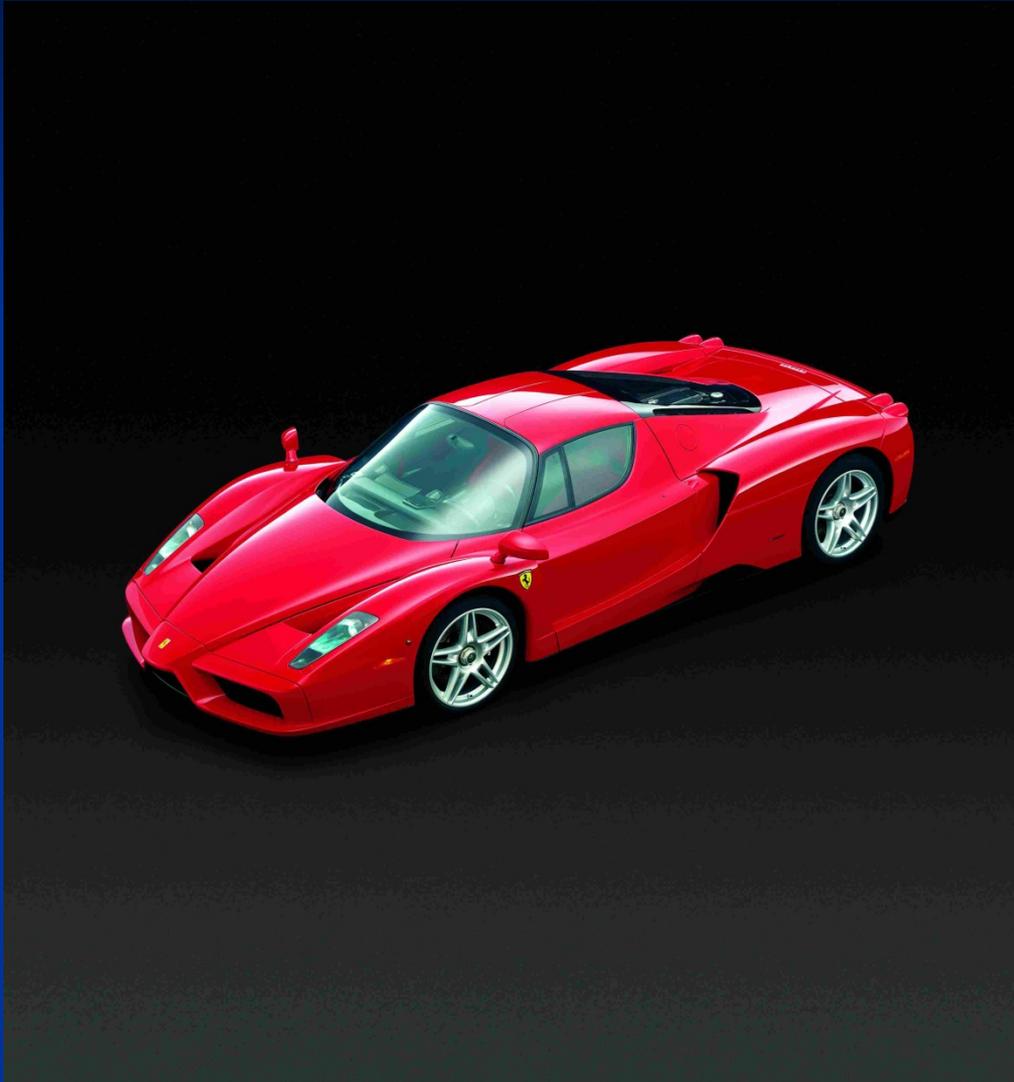
# Metodi di Fabbricazione

## OSS.

- Processo produttivo poco AUTOMATIZZATO
  - Molte ore di manodopera (\$ elevato)
  - Bassi ratei produttivi
- Difficoltà nell'assicurare distribuzione omogenea della resina (soprattutto per componenti aventi forme complesse)
- Bassi costi di investimento ( eccezion fatta per autoclave )

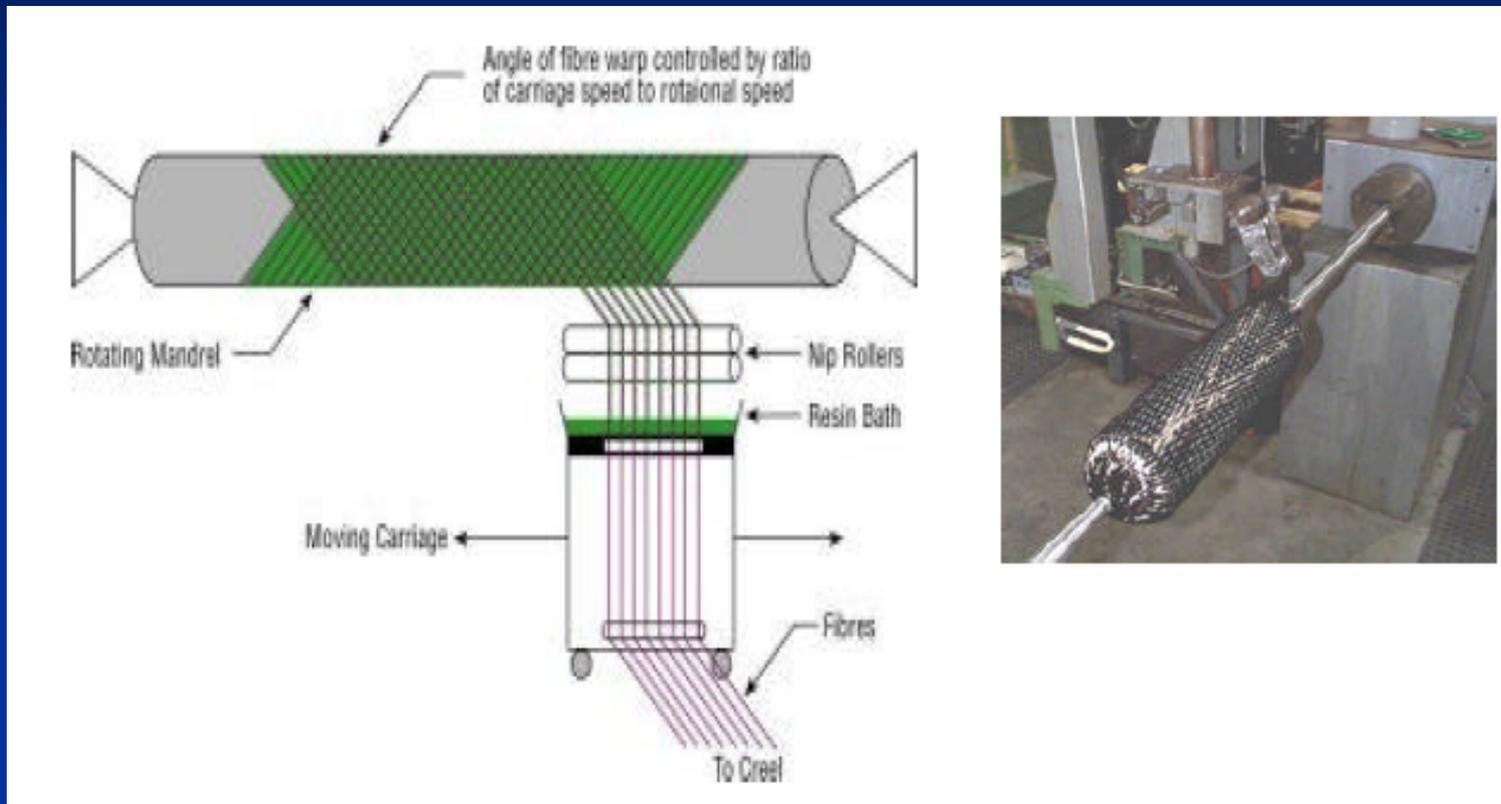
*I materiali compositi diventano vincenti qualora si realizzi in fase di progettazione una forte integrazione fra i componenti*

# Metodi di Fabbricazione



# Metodi di Fabbricazione

## Filament Winding



- Processo con maggior livello di automazione della laminazione a mano → ratei produttivi maggiori
- Adatto solo a geometrie semplici e convesse ( al più piane )
- Angoli di avvolgimento  $>5^\circ$  e  $<85^\circ$
- Cura a temperatura ambiente o in forno ( raramente in autoclave con sacco a vuoto )

# Metodi di Fabbricazione

## Filament Winding



-Le fibre possono essere pre-impregnate ( raro ) o impregnate durante il processo

- Mandrini:

Non collassabili → devono essere previsti angoli di sforno per l'estrazione

Collassabili → realizzati con materiali solubili in acqua ( paste di sabbia ); gonfiabili in

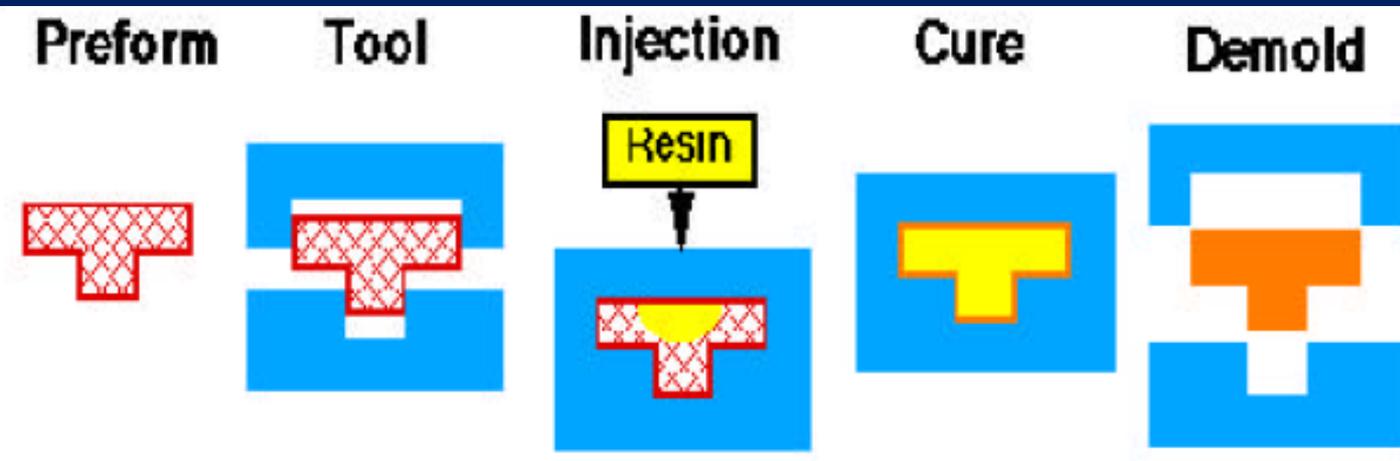
# Metodi di Fabbricazione

## Pultrusione

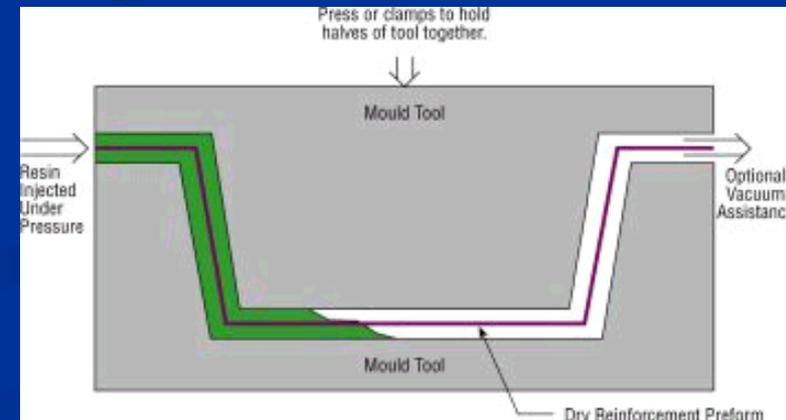
- Processo altamente automatizzato → ratei produttivi molto alti
- Elevati costi di investimento
- Adatto solo a geometrie a sezione costante ed asse rettilineo
- la polimerizzazione avviene durante la formatura

# Metodi di Fabbricazione

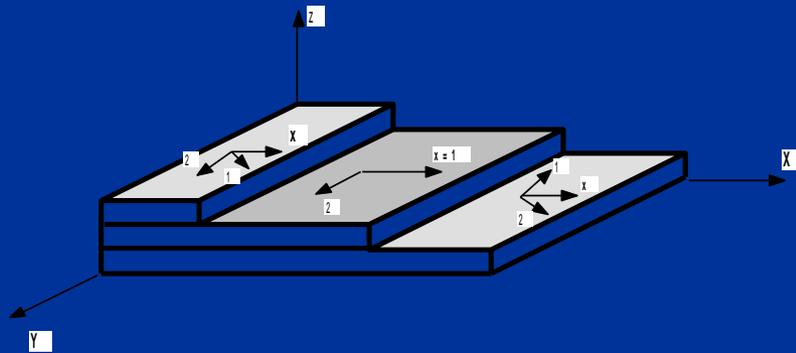
## RTM (Resin Transfer Moulding)



- Possibilità di lavorare con preformati in tessuto secco  
→ maggior maneggevolezza e semplicità di laminazione
- Non richiesta l'autoclave; cura in forno all'interno dello stampo → Rateo produttivo maggiore
- Adatto per volumi di produzione medio bassi e per forme complesse



# Cenni di Calcolo

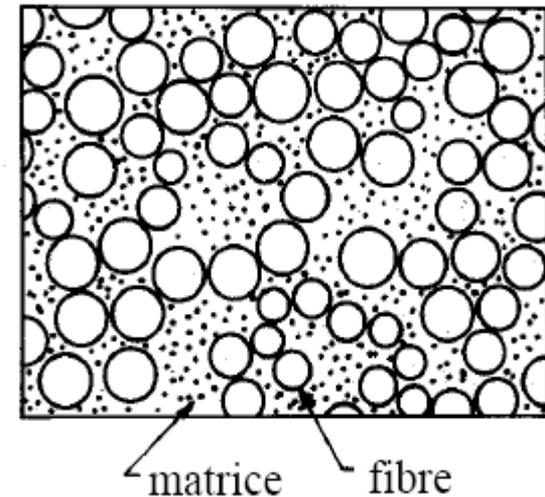
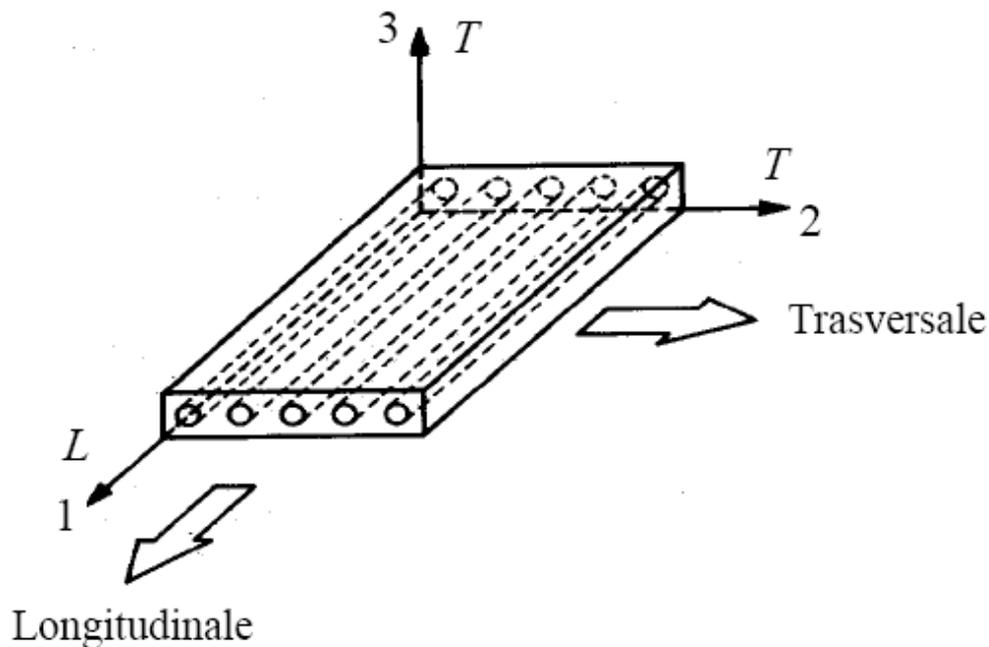


Teoria Classica dei Laminati (TCL)

# Cenni di Calcolo

- I materiali compositi sono anisotropi ed eterogenei

→ Prop. Meccaniche variabili con la direzione e da punto a punto

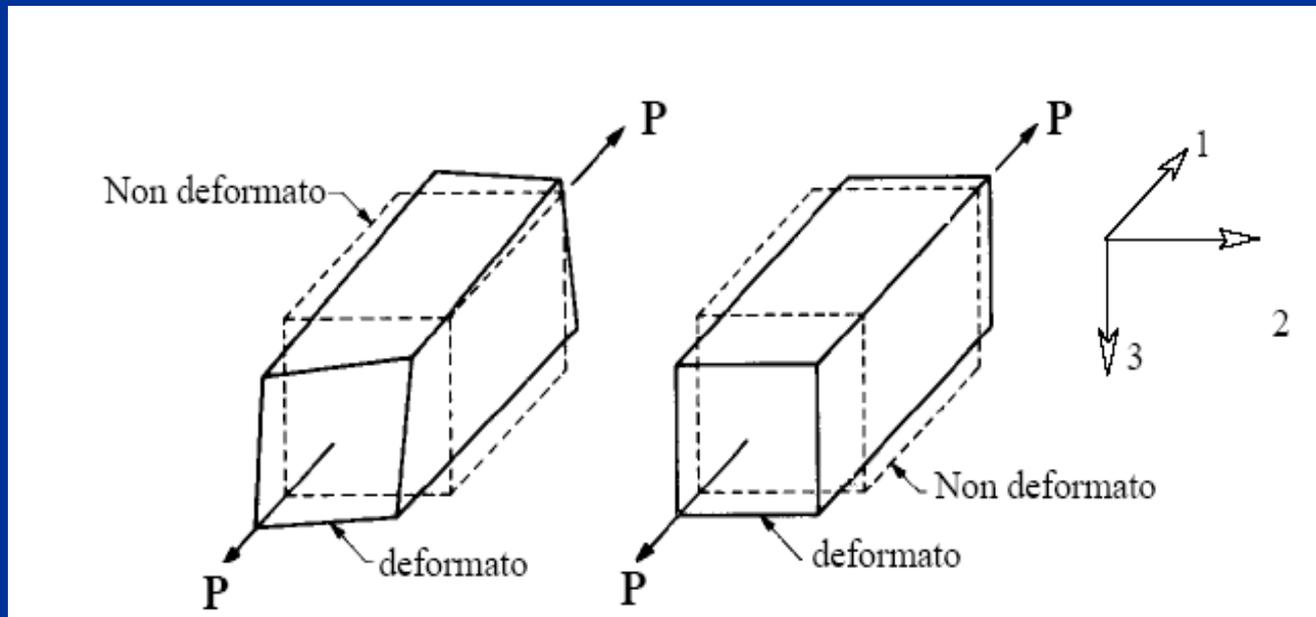


Le proprietà resistenziali nella dir. 1 sono molto migliori di quelle in dir. 2 e 3

# Cenni di Calcolo

•La lamina è **ORTROTOPA**:

→ Presenta 3 piani di simmetria per le proprietà meccaniche mutuamente ortogonali

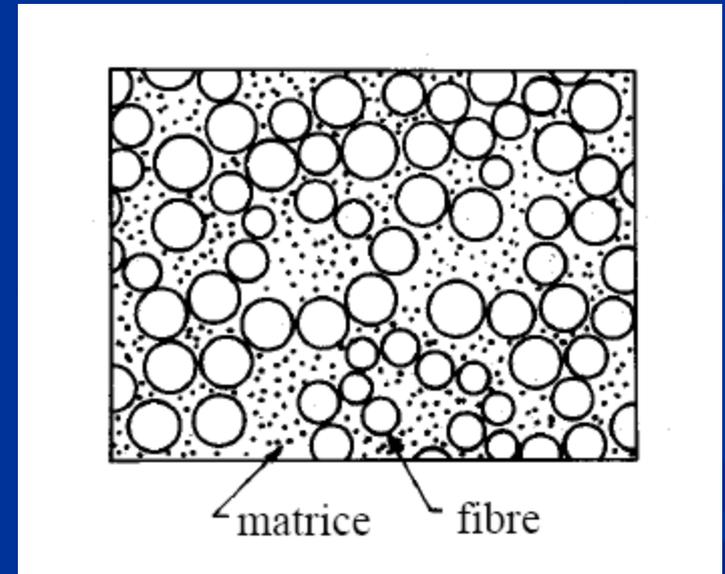
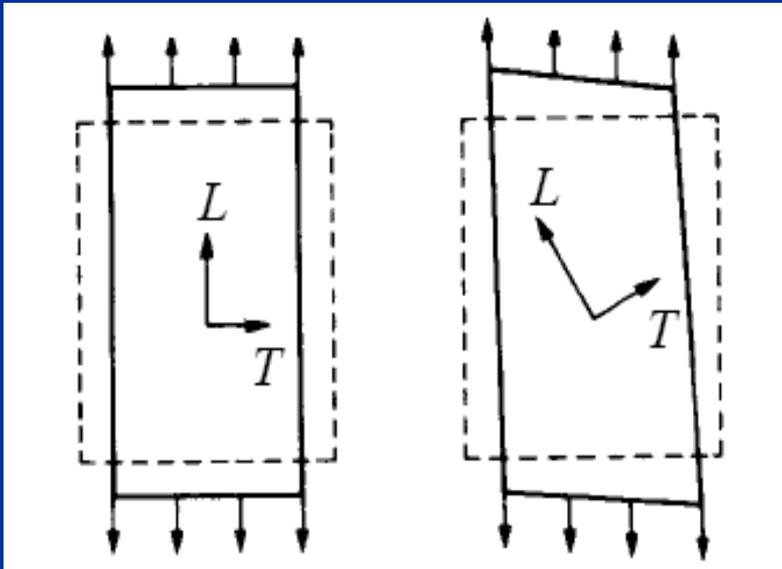


**Sollecitazioni di trazione lungo le 3 direzioni naturali non producono scorrimenti, ma solo deformazioni lineiche**

# Cenni di Calcolo

•La lamina è **ORTROTOPA**:

→ Presenta 3 piani di simmetria per le proprietà meccaniche mutuamente ortogonali



**La lamina è TRASVERSALMENTE ISOTROPA: tutte le direzioni nel piano trasversale sono invarianti**

# Cenni di Calcolo

## Micromeccanica della Lamina:

Studio delle principali proprietà meccaniche della lamina a partire da quelle di Fibra e Matrice e dalla loro interazione

$$E_f, E_m, R_m, R_f, \nu_f, \nu_m, \rho_f, \rho_m, G_m, G_f \longrightarrow E_1, E_2, R_1, R_2, \rho, \nu_{12}, G_{12}$$

La lamina viene considerata macroscopicamente omogenea

Fibre e Matrice singolarmente sono considerate :

Omogenee

Elastico lineari

Isotrope

# Cenni di Calcolo

## Micromeccanica della Lamina

**Def.**  $V_f$  : volume occupato dalle fibre/volume della lamina

$V_m$  : volume occupato dalla matrice/volume della lamina

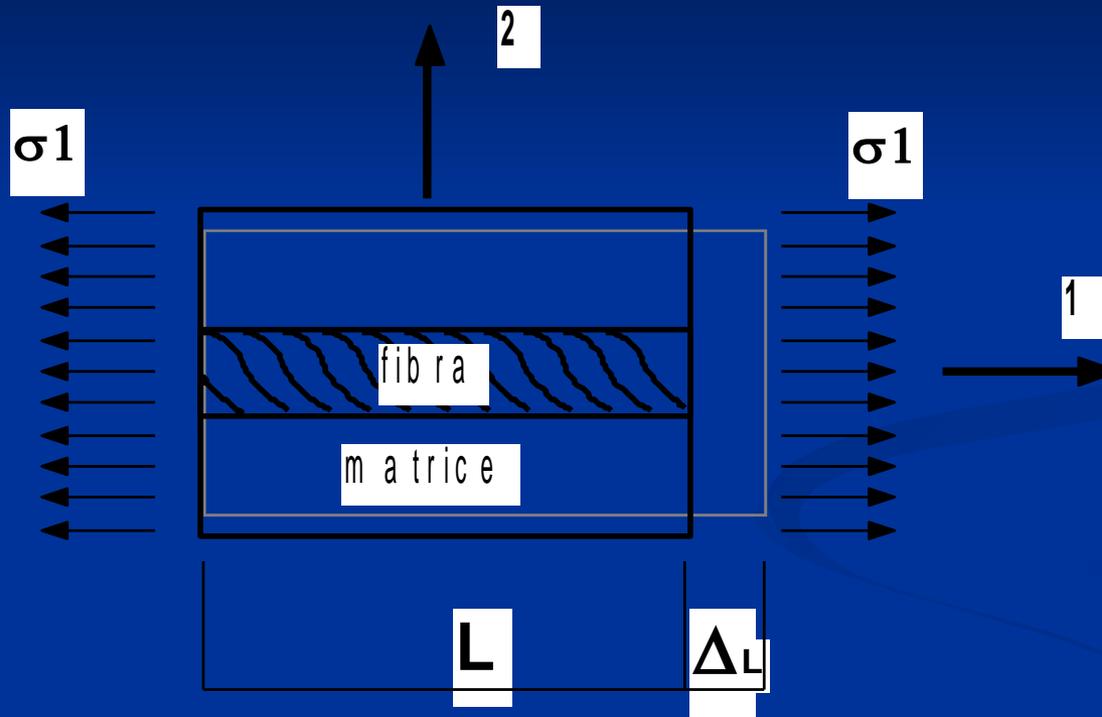
$$\rho_c = V_m \rho_m + V_f \rho_f$$

← Regola delle Miscele

La proprietà del composito è media pesata attraverso la percentuale volumetrica delle corrispondenti proprietà di fibra e matrice

# Cenni di Calcolo

## Micromeccanica della Lamina



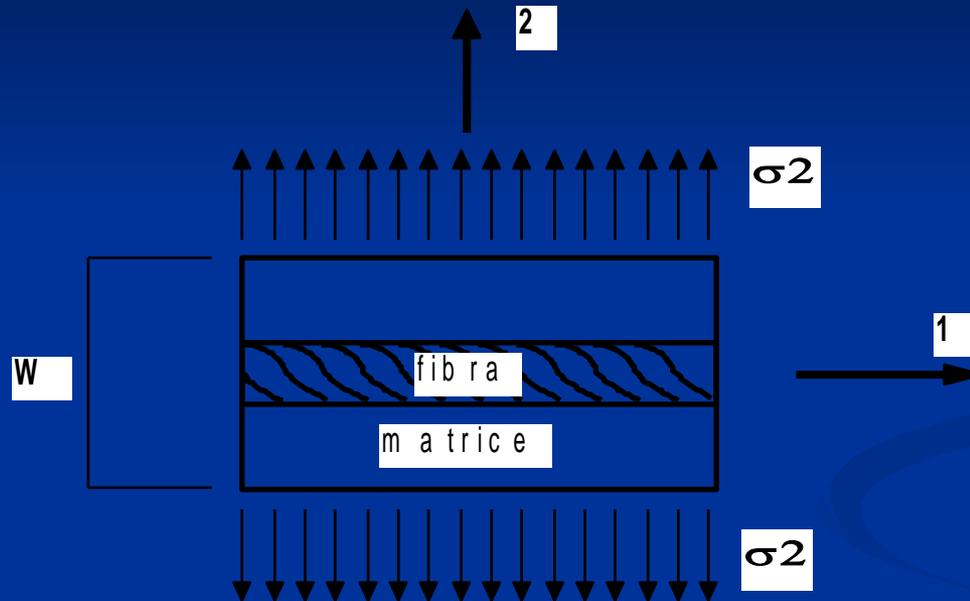
**Dir 1:** fibra e matrice agiscono in *parallelo*

$$E_1 = E_f V_f + E_m V_m$$
$$v_{12} = V_f v_f + V_m v_m$$

$$R_c = R_f V_f + R_m^{(f)} (1 - V_f)$$

# Cenni di Calcolo

## Micromeccanica della Lamina



Dir 2: fibra e matrice agiscono in serie

$$E_2 = \frac{E_f E_m}{V_f E_m + V_m E_f}$$

$$G_{12} = \frac{G_m G_f}{V_f G_m + V_m G_f}$$

$$R_2 = R_m$$

# Cenni di Calcolo

**Macromeccanica:** studio della lamina considerata **ortotropa** ed **omogenea**  
con proprietà meccaniche globali apparenti  
( NON si considera l'interazione fra i componenti )

$$\sigma_i = C_{ij} \varepsilon_j \quad i, j = 1, \dots, 6 \quad \longrightarrow \quad C_{ij} = [6 \times 6] = 36$$

Leggi COSTITUTIVE

**Oss.**

Materiale anisotropo  $\rightarrow$  21 Costanti caratteristiche

( $C_{ij}$  è SIMMETRICA in base a considerazioni di carattere energetico)

# Cenni di Calcolo

**Lamina ortotropa:** la presenza di tre piani di simmetria mutuamente ortogonali riduce a 9 il numero delle costanti caratteristiche

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}$$

**Oss.**

I termini nulli della matrice sono quelli che esprimono l'accoppiamento tra tensioni normali e scorrimenti e tra tensioni tangenziali e dilatazioni

**L'isotropia trasversale riduce a 5 le costanti caratteristiche indipendenti**

# Cenni di Calcolo

Singola lamina  $\rightarrow$  piccolo spessore  $\rightarrow$  STATO PIANO DI TENSIONE

$$\sigma_{33} = 0 \quad , \quad \tau_{23} = 0 \quad , \quad \tau_{31} = 0$$

e quindi si ha:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}$$

**Legge costitutiva della Lamina Ortotropa in Stato piano di tensione**

**Oss.**

Lamina ORTOTROPA in STATO PIANO di tensione  $\rightarrow$  4 costanti CARATTERISTICHE ( funzione di  $E_1, E_2, \nu_{12}, G_{12}$  )

# Cenni di Calcolo

$$\sigma_{33} = 0 \quad , \quad \tau_{23} = 0 \quad , \quad \tau_{31} = 0$$

e quindi si ha:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}$$

$$Q_{11} = \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$$

$$Q_{12} = \frac{\nu_{12} E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{21} E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$$

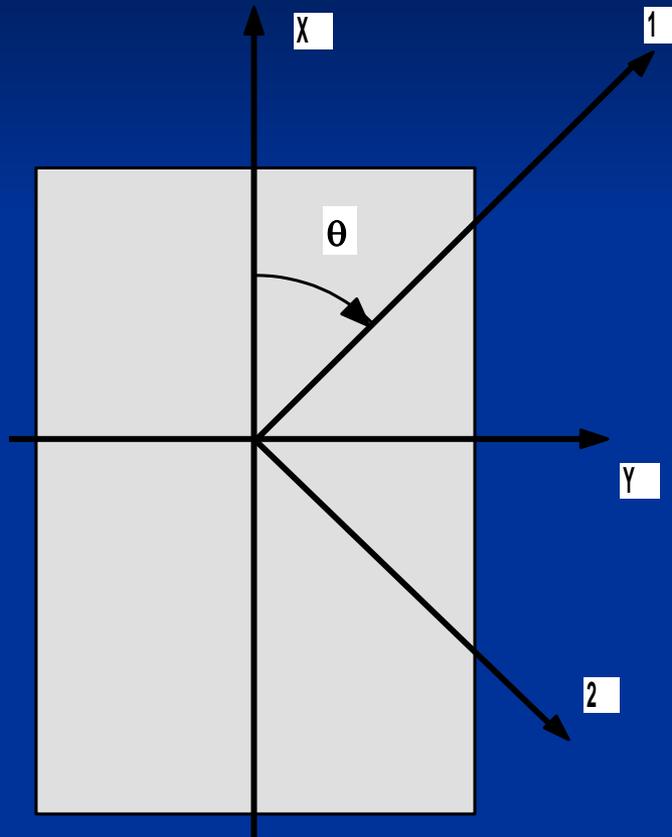
$$Q_{22} = \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$$

$$Q_{66} = G_{12}$$

$$\frac{E_{11}}{\nu_{12}} = \frac{E_{22}}{\nu_{21}}$$

Le costanti che descrivono il legame tra tensioni e deformazioni nella lamina ortotropa in stato piano di tensione dipendono solo dalle 4 costanti elastiche

# Cenni di Calcolo



La legge costitutiva correla deformazioni e tensioni relative agli assi di riferimento naturali di ortotropia



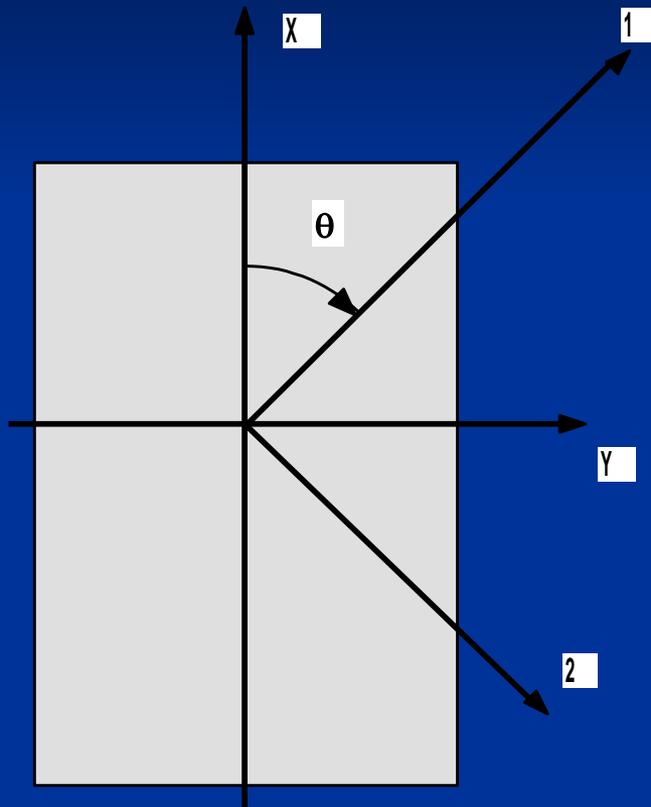
Se desideriamo le tensioni/deformazioni Relative ad un altro riferimento dobbiamo Operare una trasformazione di coordinate

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} M^2 & N^2 & -2MN \\ N^2 & M^2 & 2MN \\ MN & -MN & M^2 - N^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}$$

$$M = \cos\theta \text{ e } N = \sin\theta$$

$|T|^{-1}$

# Cenni di Calcolo



La legge costitutiva correla deformazioni e tensioni relative agli assi di riferimento naturali di ortotropia



Se desideriamo le tensioni/deformazioni Relative ad un altro riferimento dobbiamo Operare una trasformazione di coordinate

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [T]^{-1} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}$$

# Cenni di Calcolo

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = |\mathbf{T}|^{-1} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = |\mathbf{T}|^{-1} |\mathbf{Q}| \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \underbrace{|\mathbf{T}|^{-1} |\mathbf{Q}| |\mathbf{T}|}_{\text{Matrice di legame costitutivo trasformata}} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

**Matrice di legame costitutivo trasformata**  
Rispetto al generico sistema di riferimento **x-y**

# Criteri di Resistenza

## Criterio della Massima Tensione:

$$\sigma_1 \geq R_1$$

$$\sigma_2 \geq R_2$$

$$|\tau_{12}| \geq R_{12}$$

**N.B.**

Non tiene conto dell'effetto mutuo delle tensioni

→ E' equivalente a tre sotto criteri!

→ Buon accordo con lo sperimentale nel caso di stato tensionale mono assiale su 1 o 2

Nel caso di sollecitazione lungo un asse diverso da 1 o 2:

$$\sigma_1 = \sigma_x \cos^2 \theta$$

$$\sigma_2 = \sigma_x \sin^2 \theta$$

$$\tau_{12} = \sigma_x \sin \theta \cos \theta$$

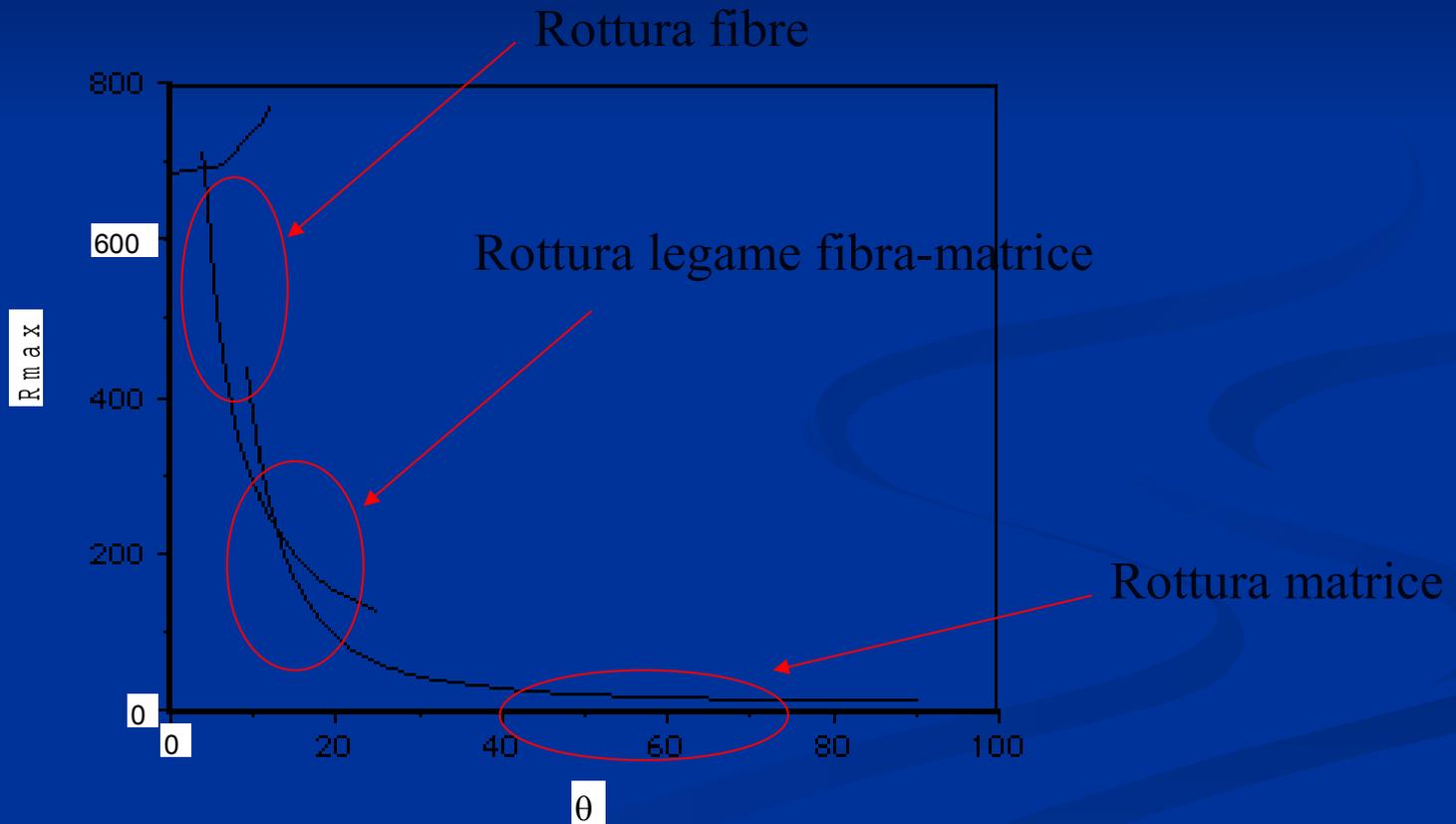
$$\sigma_x \geq \frac{R_1}{\cos^2 \theta} \quad \sigma_x \geq \frac{R_2}{\sin^2 \theta}$$

$$\sigma_x \geq \frac{R_{12}}{\sin \theta \cos \theta}$$

# Criteri di Resistenza

## Criterio della Massima Tensione

Variazione del carico critico con la direzione di sollecitazione:



# Criteri di Resistenza

## Criterio della Massima Energia di Distorsione (Tsai-Hill)

$$\frac{\sigma_1^2}{R_1^2} - \frac{\sigma_1\sigma_2}{R_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{R_2^2} + \frac{\tau_{12}^2}{R_{12}^2} \leq 1$$

← Condizione di rottura

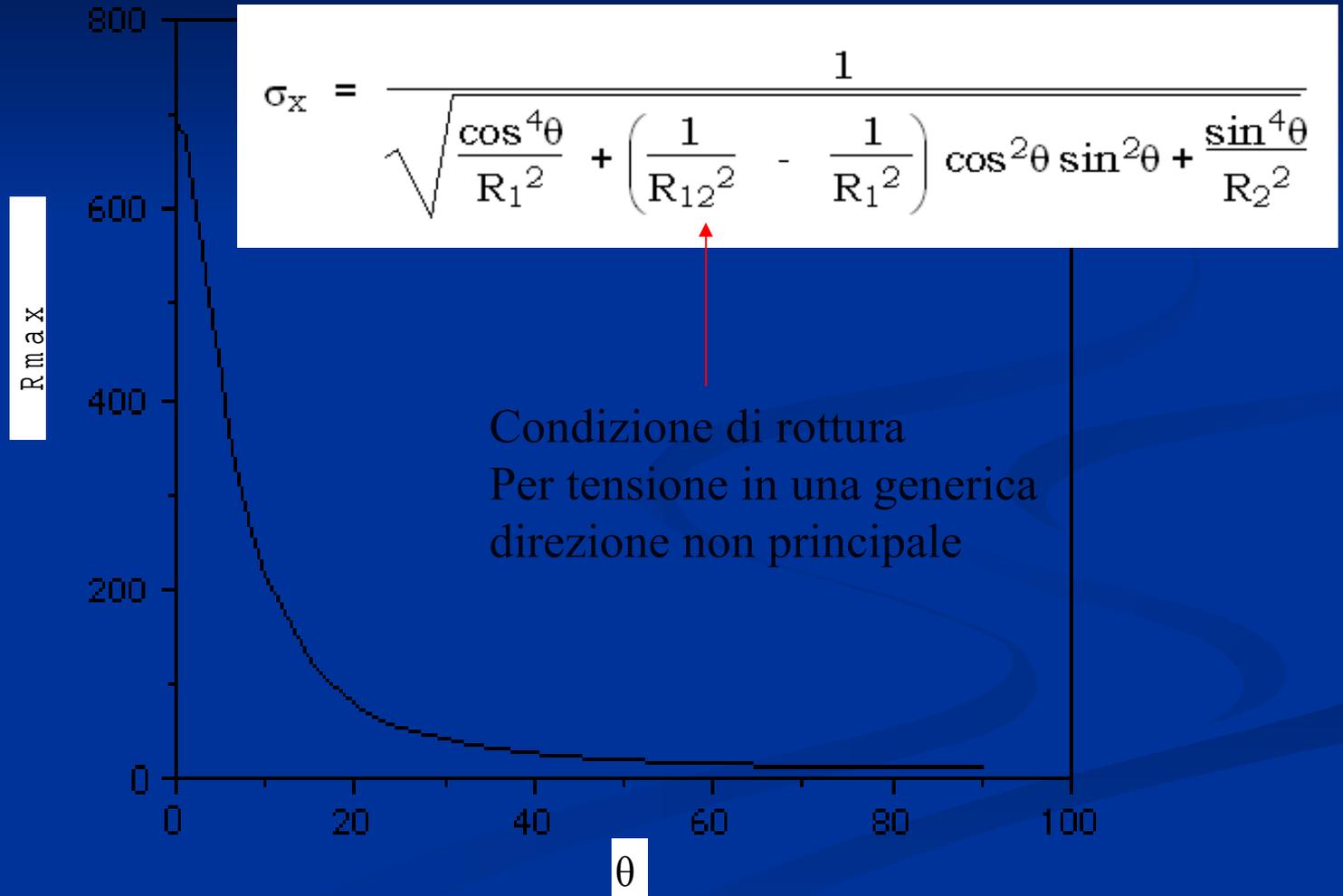
**N.B.**

**Tiene conto dell'interazione fra le tensioni in direzioni diverse**

E' migliore del criterio della massima tensione nel prevedere la rottura in stati composti di sforzo

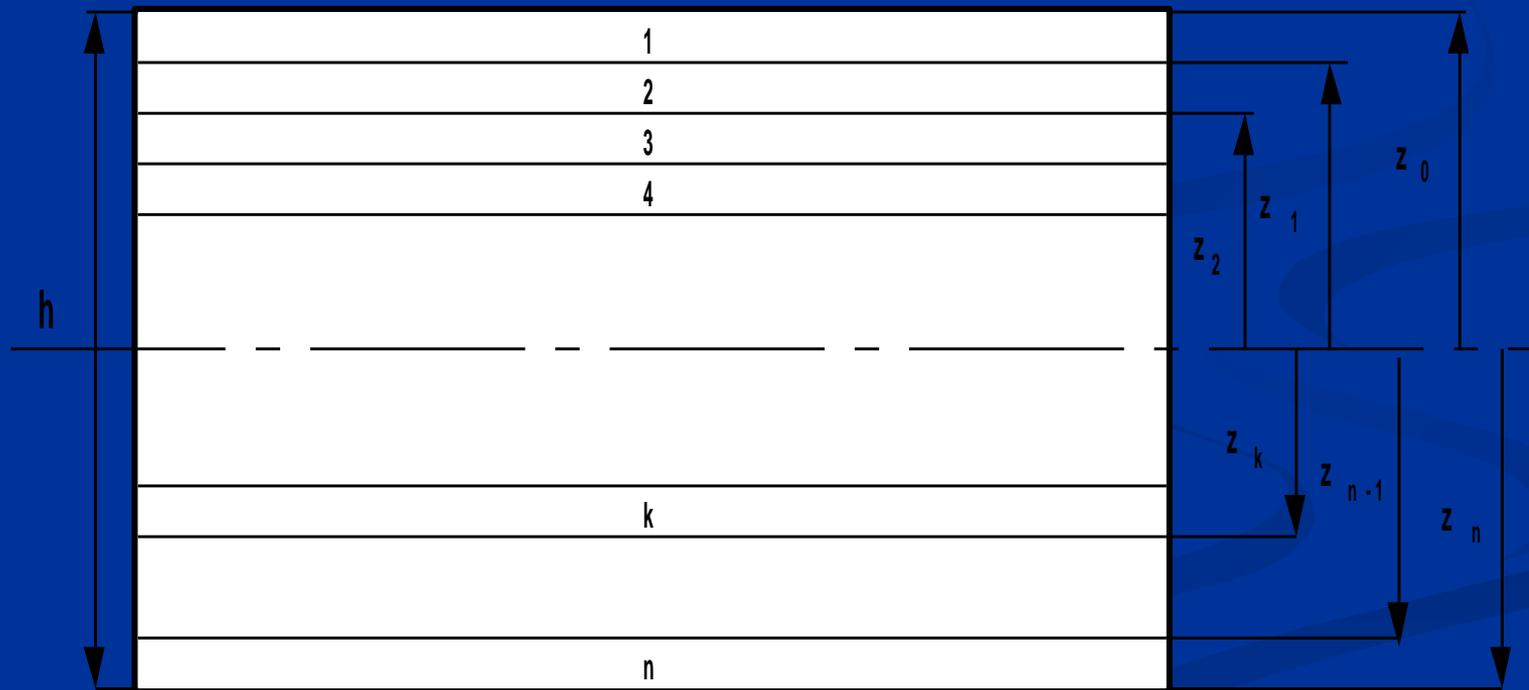
# Criteri di Resistenza

## Criterio della Massima Energia di Distorsione (Tsai-Hill)



# TCL: teoria classica della laminazione

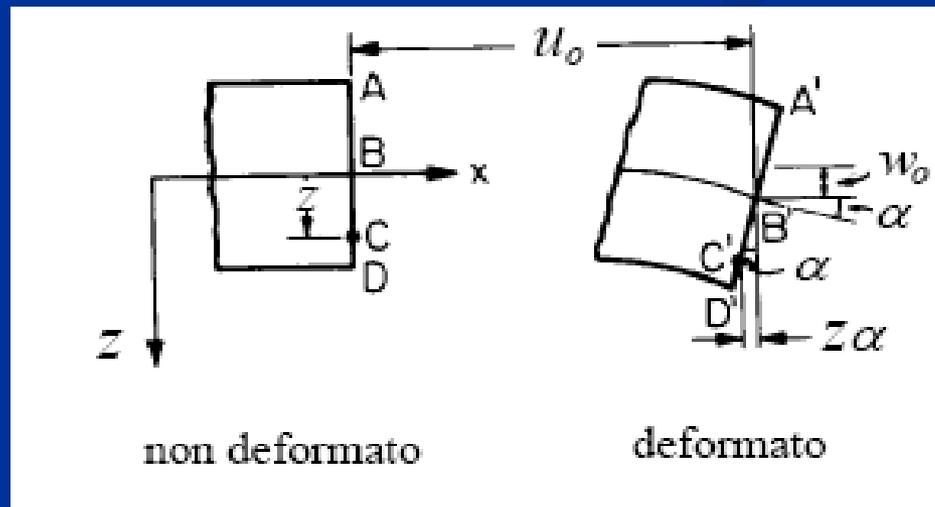
- Permette di ricavare il legame tra le deformazioni all'interno dei **laminati** e le caratteristiche della sollecitazione
- Teoria di **Kirchoff** per le piastre



# TCL: teoria classica della laminazione

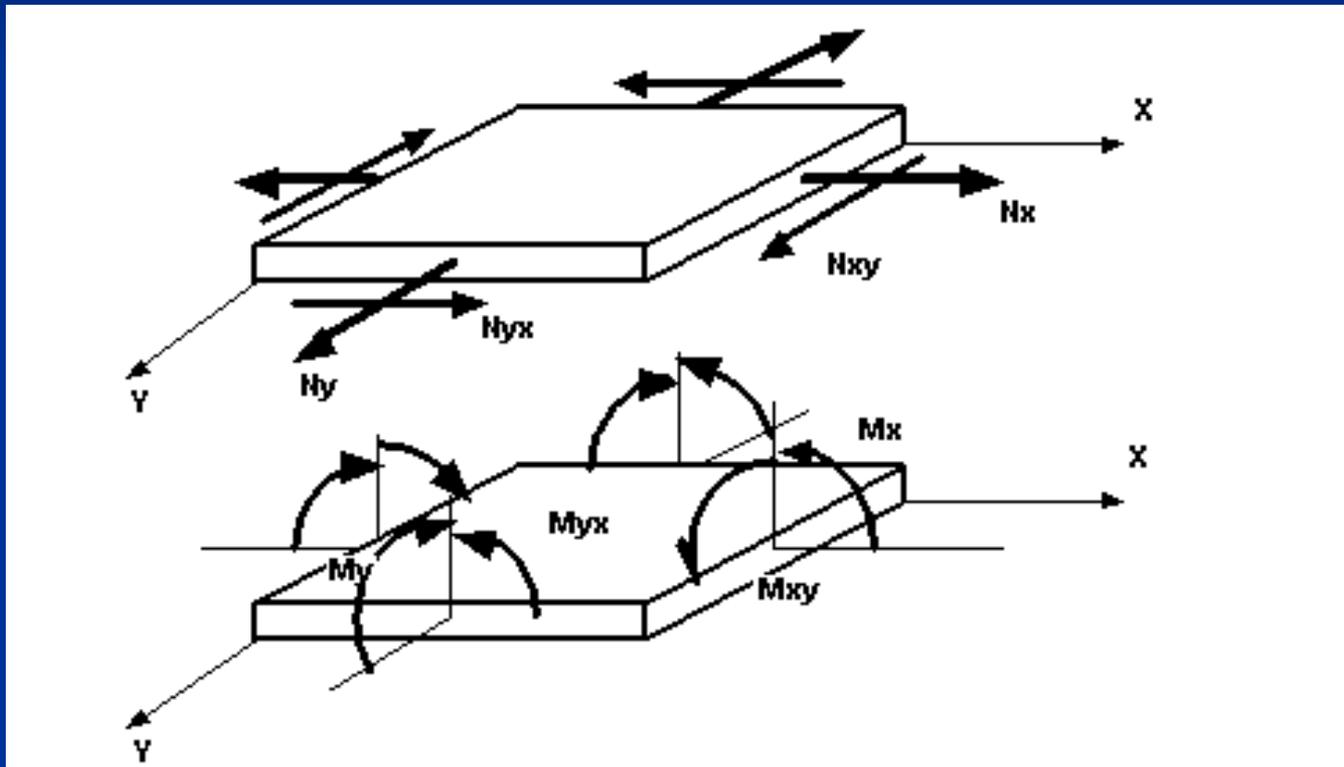
**Hp della trattazione:**

- 1) Lamine perfettamente incollate tra loro → Continuità di spost. e deformaz. all'interfaccia
- 2) Laminato sottile → Stato piano di tensione
- 3) Il generico segmento rettilineo ortogonale al piano medio del laminato rimane rettilineo ed ortogonale al piano medio anche a Def. AVVENUTA ( $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ )
- 4)  $\epsilon_z$  trascurabile rispetto a  $\epsilon_x$  ed  $\epsilon_y$
- 5) Spessore del laminato piccolo rispetto alle altre dimensioni

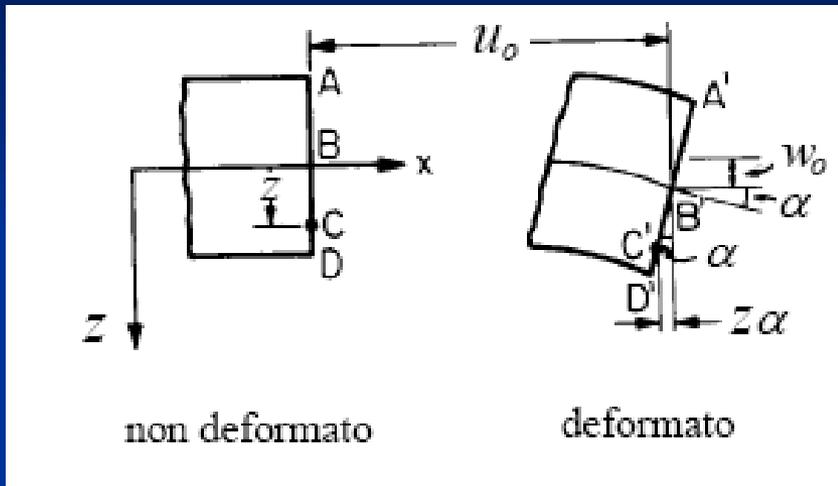


# TCL:teoria classica della laminazione

Convenzioni su carichi:  
si tratta di sforzi e momenti agenti per unità di larghezza sul laminato



# TCL: teoria classica della laminazione



→ Gli spostamenti hanno andamento lineare lungo z

$$v(z) = v_o - z \frac{\partial w_o}{\partial y}$$

$$u(z) = u_o - z \frac{\partial w_o}{\partial x}$$

↓ Equazioni di congruenza

Deformazioni nella **generica lamina a distanza Z** da piano medio in funzione delle deformazioni sul piano medio →

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_o}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \varepsilon_x^o + zk_x \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_o}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \varepsilon_y^o + zk_y \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_o}{\partial y} + \frac{\partial v_o}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = \gamma_{xy}^o + zk_{xy} \end{cases}$$

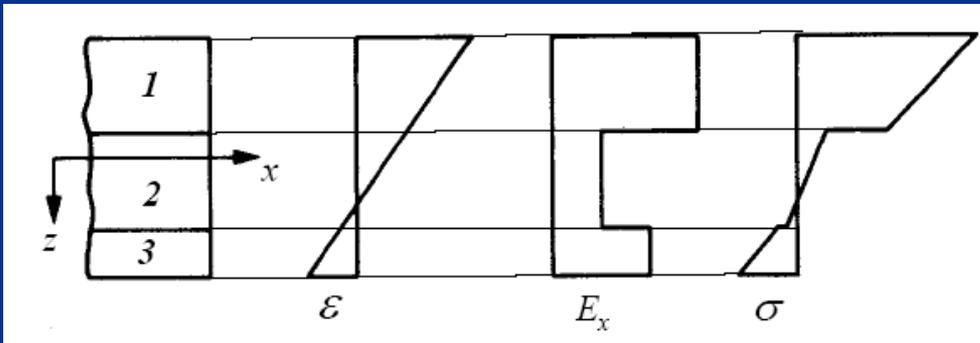
# TCL: teoria classica della laminazione

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix}$$



$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [\tilde{E}]_k \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [\tilde{E}]_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + z [\tilde{E}]_k \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix}$$

**Equazioni Costitutive:** stato tensionale nella  
generica lamina k-esima



**Oss.**

Le deformazioni sono continue nel passaggio tra le lamine.

**LE TENSIONI NO** (perché le matrici costitutive **NON** sono le stesse tra lamine diverse)

# TCL: teoria classica della laminazione

**Equazioni di equilibrio:** Equivalenza statica tra tensioni e caratteristiche della sollecitazione sul laminato

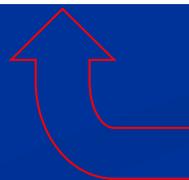


$$N_i = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_i dz$$

$$M_i = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_i z dz$$

$i=x,y,xy$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^\circ \\ \varepsilon_y^\circ \\ \gamma_{xy}^\circ \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & H_{14} & H_{15} & H_{16} \\ H_{12} & H_{22} & H_{23} & H_{24} & H_{25} & H_{26} \\ H_{13} & H_{23} & H_{33} & H_{34} & H_{35} & H_{36} \\ H_{14} & H_{24} & H_{34} & H_{44} & H_{45} & H_{46} \\ H_{15} & H_{25} & H_{35} & H_{45} & H_{55} & H_{56} \\ H_{16} & H_{26} & H_{36} & H_{46} & H_{56} & H_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix}$$



**Equazione Pseudo-Costitutiva del Laminato:** *Fornisce il legame tra deformazioni e caratteristiche della sollecitazione*

# Tipi particolari di Laminati

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{ij} = \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1})$$

$$\mathbf{B}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2)$$

$$\mathbf{D}_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3)$$

**A:** matrice di accoppiamento tra Deformazioni nel piano e Sforzi nel piano  
( Matrice di rigidità estensionale )

**B:** matrice di accoppiamento tra Deformazioni nel piano e Momenti fuori dal piano  
e fra Curvature fuori dal piano e Sforzi nel piano (Matrice di Accoppiamento )

**D:** matrice di accoppiamento tra Curvature e Momenti fuori dal piano  
(Matrice di rigidità flessionale )

# Tipi particolari di Laminati

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^\circ \\ \varepsilon_y^\circ \\ \gamma_{xy}^\circ \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix}$$

Laminati **SIMMETRICI**  $\longleftrightarrow$   $\mathbf{B} = \mathbf{0}$   $\longleftrightarrow$

Le lamine disposte simmetricamente rispetto al piano medio sono uguali e con stesso orientamento

Accoppiamento nullo tra flessione e sforzo normale (importante per evitare distorsioni a valle del processo di cura)

$0^\circ \setminus 0^\circ \setminus +45^\circ \setminus -45^\circ \setminus -45^\circ \setminus +45^\circ \setminus 0^\circ \setminus 0^\circ$



$[0_2 / \pm 45^\circ]_s$

# Tipi particolari di Laminati

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^\circ \\ \varepsilon_y^\circ \\ \gamma_{xy}^\circ \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \textcircled{A_{13}} \\ A_{21} & A_{22} & \textcircled{A_{23}} \\ \textcircled{A_{31}} & \textcircled{A_{32}} & A_{33} \\ & \mathbf{B} & \\ & \mathbf{D} & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix}$$

**Laminati ORTOTROPI**  
o **BILANCIATI**

$$A_{13} = A_{23} = 0$$

Per ogni lamina orientata secondo un angolo  $\theta$  ne esiste una orientata di  $-\theta$  a prescindere dalla sequenza

Accoppiamento nullo tra sforzo normale e scorrimenti e fra taglio e deformazioni normali

$0^\circ \setminus 0^\circ \setminus +45^\circ \setminus -45^\circ \setminus -45^\circ \setminus +45^\circ \setminus 0^\circ \setminus 0^\circ$

E' anche ortotropo

# Tipi particolari di Laminati

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^\circ \\ \varepsilon_y^\circ \\ \gamma_{xy}^\circ \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix}$$

$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix}$

**Laminati con  $D_{13}=D_{23}=0$**   $\longleftrightarrow$

Per ogni lamina orientata secondo un angolo  $\theta$  ne esiste una orientata di  $-\theta$  e simmetricamente disposta rispetto alla mezzeria

Accoppiamento nullo Momenti flettenti e curvatura torsionale e fra momento torcente e curvature flessionali

**NON** compatibile con la condizione di simmetria

# Tipi particolari di Laminati

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^\circ \\ \varepsilon_y^\circ \\ \gamma_{xy}^\circ \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix}$$

$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix}$

Laminati con  $D_{13}=D_{23}=0$   $\longleftrightarrow$

...però se si dispongono lamine successive con orientamento opposto, allora si ottengono valori molto Bassi per D13 e D23  $\rightarrow$  Accoppiamento quasi nullo tra flessione e torsione

$\longrightarrow$   $[0_2 / \pm 45^\circ]_s$

Il laminato suddetto disaccoppia (quasi!) anche la torsione dalla flessione

# Tipi particolari di Laminati

**Laminati quasi isotropi**  $\longleftrightarrow$  **La matrice A è isotropa**

Condizione necessaria e sufficiente affinché un laminato sia quasi isotropo è che si abbia:

- numero lamine (  $n$  ) maggiore o uguale a 3
- tutte le lamine siano uguali come spessore e materiale
- lamine equispaziate angolarmente:  $\Delta\theta = 2 \pi/n$

**Osservazione: L'isotropia vale solo per le rigidezze a trazione e compressione**

Es. di laminato quasi isotropo, simmetrico e bilanciato con basso accoppiamento tra flessione e torsione

$[\pm 30/\pm 90/\pm 30]_s$