

CONCETTI RIASSUNTIVI FCM

prof. Strozzi

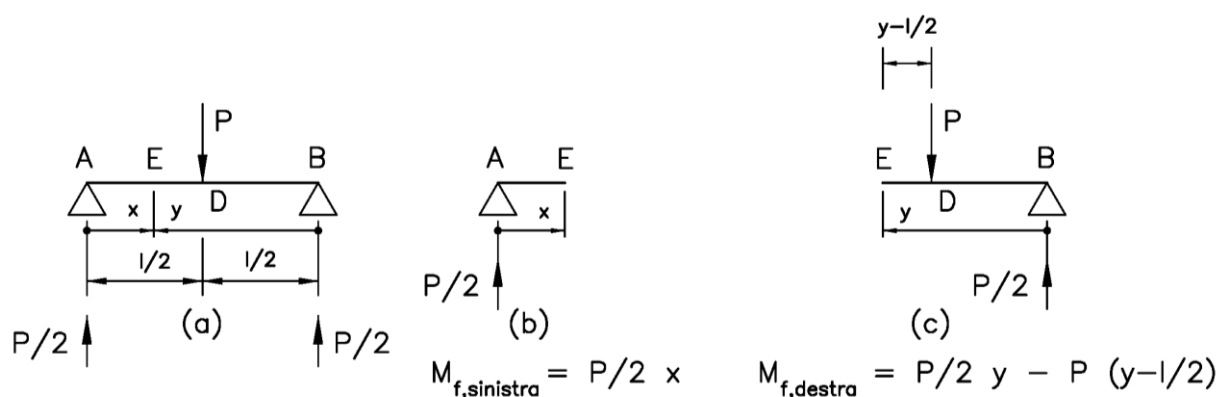
1 I simboli impiegati per descrivere le tensioni

Normalmente le tensioni vengono indicate con i due simboli σ e τ . Le ragioni per le quali gli ingegneri non adottano un unico simbolo per denotare le tensioni sono principalmente due:

- * il materiale resiste di più a tensione σ che a τ . Per esempio, per un acciaio C40 la tensione di snervamento a σ vale 430 MPa, mentre la tensione di snervamento a τ vale 220 MPa;
- * la tensione σ produce allungamenti o accorciamenti, mentre la tensione τ produce variazioni d'angolo (scorrimenti).

2 Calcolo delle reazioni vincolari

Per il calcolo delle reazioni vincolari, occorre tener conto di tutto il carico applicato alla struttura. In una struttura isostatica, le reazioni vincolari si calcolano tramite le sole equazioni di equilibrio. In una struttura iperstatica, occorre aggiungere equazioni di compatibilità tante quanto il grado di iperstaticità della struttura. Invece, **nel calcolo delle caratteristiche di sollecitazione**, occorre tener conto soltanto del carico da una parte (a destra o a sinistra) rispetto alla sezione nella quale si vuole calcolare le caratteristiche di sollecitazione.



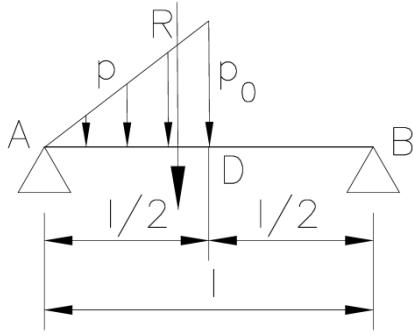
Si considera come esempio la trave doppiamente appoggiata, e caricata da una forza trasversale centrale P di Figura (a). Per simmetria, le reazioni vincolari valgono entrambe $P/2$. Si vuole calcolare M_f nella sezione E definita

dalla coordinata x (o dalla coordinata y) considerando le sole forze agenti alla sinistra di E , oppure alternativamente considerando le sole forze alla destra di E . La Figura (b) calcola M_f considerando le forze alla sinistra di E . L'unica forza presente è $P/2$, la quale possiede un braccio x rispetto alla sezione E . Siccome M_f vale forza per braccio, si ha $M_f = P/2 x$. Immaginando che il moncone $A E$ di trave di Figura (b) venga impugnato in E , ed il tratto $A E$ sporga dalla mano, si nota che le fibre inferiori del tratto $A E$ vanno in trazione sotto l'effetto inflettente della reazione $P/2$. (Si veda la Figura a p. 52 di Sprofondamenti di Costruzione di Macchine.) Scrivendo $M_{f,\text{sinistro}} = P/2 x$, si è quindi scelto di attribuire ad M_f un segno positivo se esso tende le fibre inferiori. Si conserva questa convenzione nel calcolo di M_f nel tratto $E B$ di Figura (c), il quale considera soltanto le forze agenti alla destra della sezione E , e cioè le forze $P/2$ e P . La forza $P/2$ di Figura (c) possiede un braccio y rispetto alla sezione E , mentre la forza P possiede un braccio $y-l/2$. Siccome M_f vale forza per braccio, si ha $M_{f,\text{destra}} = P/2 y - P(y-l/2)$. Il primo termine possiede il segno $+$ dato che, se agisse soltanto $P/2$ e se il moncone di trave fosse impugnato in E e sporgesse del tratto $E B$, la reazione $P/2$ inflette il moncone tendendo le fibre inferiori, confermando così che si è adottata anche per il tratto $E B$ la convenzione sul segno di M_f adottata per il tratto $A E$ in Figura (b). Invece la forza P , se agisse da sola, tenderebbe le fibre superiori del tratto $E B$, e quindi la parte corrispondente dell'espressione di $M_{f,\text{destra}}$ deve avere il segno $-$.

L'espressione di $M_{f,\text{destra}}$ si può ridurre a $P/2(l-y)$. Ricordando che $x+y=l$, Figura (a), allora $l-y=x$, per cui $M_{f,\text{destra}} = P/2 x$, formula che coincide con quella di M_{sinistro} . Si conclude che M_f possiede lo stesso valore se calcolato considerando i soli carichi alla destra od alla sinistra della sezione considerata.

3 Liceità della sostituzione di un carico distribuito con la sua risultante

Se in una struttura isostatica un gruppo di forze viene sostituito dalla sua risultante, le caratteristiche di sollecitazione variano soltanto all'interno della zona in cui si è effettuata la sostituzione. Per le strutture isostatiche tale risultato vale soltanto relativamente alle caratteristiche di sollecitazione, ma non per la deformata della struttura, che è diversa nei due casi. Per le strutture iperstatiche (capitolo 5 di Fondamenti di CM), tale risultato non vale, né per le caratteristiche di sollecitazione, né per la deformata. FCM p. 253. Si vedano anche gli esercizi FCM 4.12.4 e 4.12.35.

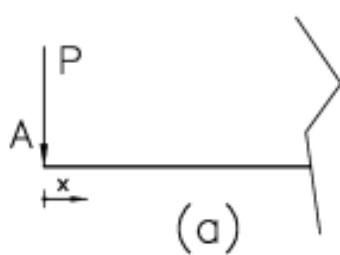


Si consideri la Figura di una trave su due appoggi, caricata da una rampa triangolare di pressione. La trave è isostatica. Al tratto triangolare di pressione agente nel tratto AD è lecito sostituire la sua risultante R per effettuare il calcolo delle reazioni vincolari. Invece tale sostituzione non è più lecita per il calcolo del

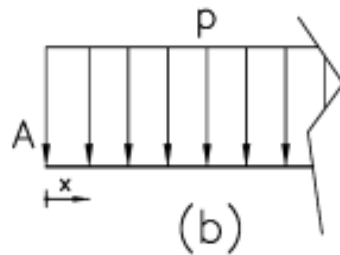
momento flettente, il quale va calcolato a partire dal carico effettivo e non da quello nel quale si è sostituito al tratto triangolare di pressione la sua risultante. Più esattamente, la sostituzione del tratto di pressione triangolare con la sua risultante R è lecita nel calcolo del momento flettente nel tratto DB , mentre non è lecita per calcolare M_f nel tratto AD , cioè nel tratto nel quale si è operata la sostituzione. Nel tratto AD il carico a pressione triangolare produce un M_f che varia come x^3 , mentre il carico R produce nel tratto AD un M_f lineare a tratti, che quindi varia come x . I due M_f sono quindi diversi.

4 Andamento del momento flettente

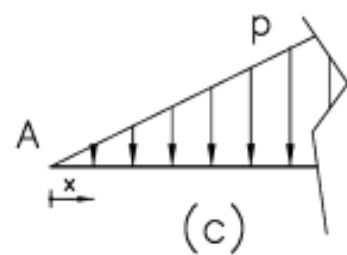
Il momento flettente a partire da una estremità di una trave, caricata dalla forza trasversale P , vale Px , dove x è una coordinata con origine all'estremità della trave, vedi p. 349 FCM. Se invece la trave è caricata da una pressione p distribuita uniformemente lungo un certo tratto, il momento flettente vale in tale tratto $px^2/2$, vedi p. 364 FCM. Se poi la trave è caricata anche da una forza P come nel primo caso, allora compare nel momento flettente anche il termine Px . Infine, se la trave è caricata da una rampa triangolare di pressione p , il momento flettente varia come x^3 , vedi p. 356 FCM. Questi tre esempi testimoniano momenti flettenti lineari, quadratici, e cubici in x .



$$M_f(x) = Px$$



$$M_f(x) = px^2/2$$



$$M_f(x) \text{ prop. } x^3$$

5 Vincoli interni

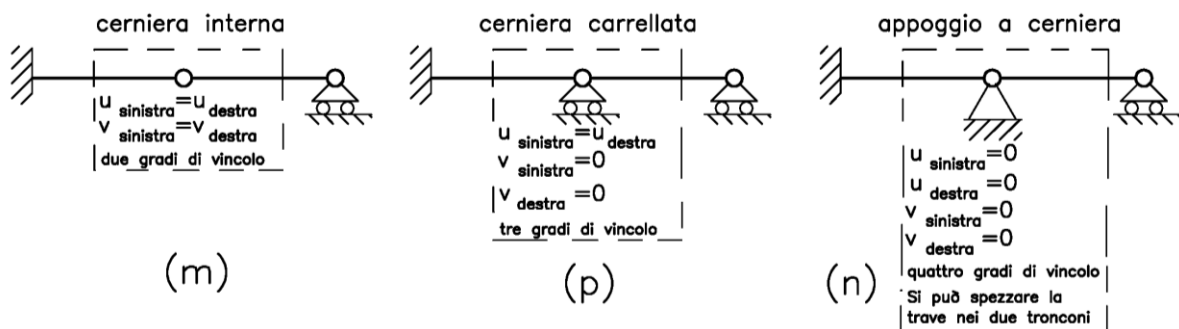
Si discute il grado di vincolo complessivo di tre vincoli interni, e cioè una cerniera interna, Figura (m), una cerniera carrellata, Figura (p), ed un appoggio a cerniera, Figura (n) di Figura 5.2 p. 317 FCM.

La cerniera interna impone che gli spostamenti orizzontali u a destra e a sinistra della cerniera siano eguali, ma non impone un valore a tali spostamenti, per esempio non impone che tali spostamenti siano nulli. L'equazione di vincolo è quindi del tipo $u_{\text{sinistra}} - u_{\text{destra}} = 0$. Inoltre la cerniera interna impone che gli spostamenti verticali v a destra e a sinistra della cerniera siano eguali, anche se non necessariamente nulli. Invece la cerniera interna non impone costrizioni sulle rotazioni dei due tronchi di trave. Il grado di vincolo complessivamente esercitato sui due tronconi di trave è perciò 2.

La cerniera carrellata impone che gli spostamenti orizzontali u a destra e a sinistra della cerniera siano eguali, ma non necessariamente nulli. Inoltre la cerniera carrellata impone che gli spostamenti verticali v a destra e a sinistra della cerniera siano nulli. Le equazioni di vincolo sono quindi $u_{\text{sinistra}} - u_{\text{destra}} = 0$, $v_{\text{sinistra}} = 0$, $v_{\text{destra}} = 0$. Il grado di vincolo complessivamente esercitato sui due tronconi di trave è perciò 3.

L'appoggio a cerniera impone che gli spostamenti orizzontali u e verticali v a destra e a sinistra della cerniera siano entrambi nulli. Le equazioni di vincolo sono quindi $u_{\text{sinistra}} = 0$, $u_{\text{destra}} = 0$, $v_{\text{sinistra}} = 0$, $v_{\text{destra}} = 0$. Il grado di vincolo complessivamente esercitato sui due tronconi di trave è perciò 4. Solo per questo tipo di vincolo, da un punto di vista pratico si può spezzare la struttura nei suoi due tronconi, trattandoli separatamente.

gradi di vincolo di tre vincoli interni



6 Le caratteristiche di sollecitazione e le relative tensioni

La caratteristica di sollecitazione di sforzo normale N produce una tensione σ , quella di momento flettente M_f produce una tensione σ , quella di taglio T produce una tensione τ , quella di momento torcente M_t produce una tensione τ .

N	σ
M_f	σ
T	τ
M_t	τ

Eccezione a questa regola è la torsione in alcune sezioni aperte, si veda teoria di Vlasov, applicando torsione alle quali nascono non solo tensioni τ ma anche tensioni σ (le ali si inflettono), p.182 FCM.

7 Complessità ed applicabilità dei modelli per valutare le tensioni flessionali e torsionali

Si considerano nel seguito soltanto **flessione e torsione**, le cui tensioni sono in genere dominanti rispetto a quelle di taglio e di sforzo normale. Essendo a disposizione una formula di validità molto generale, basata sulla conservazione delle sezioni piane, le tensioni flessionali sono facili da calcolare per una sezione di forma generica, purché essa presenti almeno un asse di simmetria. In questo caso, la flessione deviata può essere scomposta in due flessioni rette, Figura 4.53 p. 190 FCM. Se la sezione non possiede alcun asse di simmetria, occorre impiegare la difficile teoria dell'ellisse centrale di inerzia, p. 224 FCM. Una struttura nella quale la teoria flessionale fornisce risultati soltanto approssimati è lo spinotto automobilistico, Figura 4.70 (h-1), p. 247 FCM, dove la presenza di una deformata di ovalizzazione oltre alla deformata flessionale rende la teoria flessionale approssimata. Per esempio, l'asse neutro della tensione flessionale non è più baricentrico.

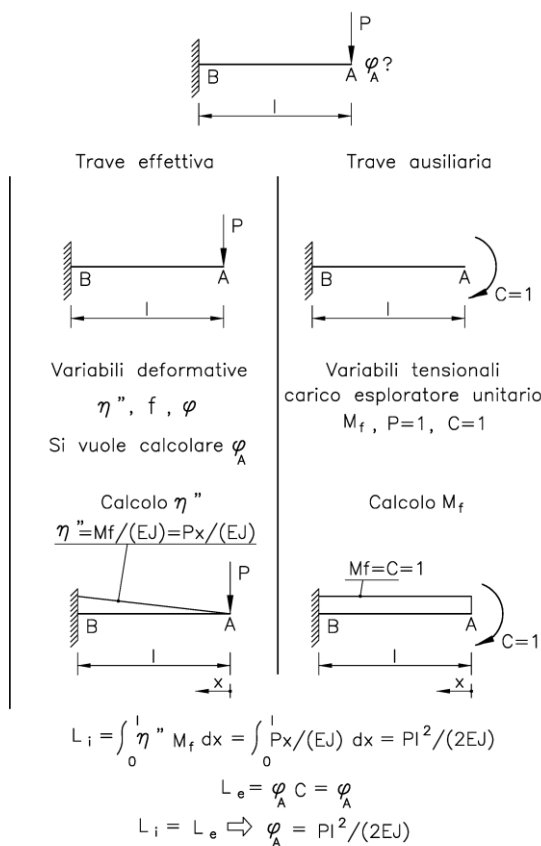
Passando alla torsione, le tensioni torsionali si calcolano esattamente per sezioni circolari piene e cave; per sezioni rettangolari piene sono disponibili solo formule approssimate. Per sezioni anulari chiuse a parete sottile ma di forma qualunque, le tensioni torsionali sono calcolabili con la prima formula di Bredt se si conosce il momento torcente imposto. Se invece si conosce la forza tagliante, per calcolare il braccio della forza e quindi il momento torcente imposto, occorre individuare il centro di taglio, difficile da calcolare. Per

sezioni anulari chiuse in parete grossa, per il calcolo delle tensioni non si conoscono teorie insieme semplici ed accurate.

Si conclude che *la teoria per il calcolo delle tensioni flessionali possiede un campo di applicabilità molto maggiore della teoria per il calcolo delle tensioni torsionali*. Si veda l'esercizio 4.13.34 p. 302 FCM.5

8 Principio dei lavori virtuali

Il principio dei lavori virtuali PLV permette di calcolare frecce e rotazioni in travi. Convienne effettuare i calcoli organizzandoli su due colonne adiacenti. Si



impiega nel seguito la seguente terminologia non unificata: trave effettiva e trave ausiliaria. Purtroppo la terminologia impiegata varia tra le Università. Nella colonna di sinistra si disegna la geometria della trave effettiva, ed i vincoli ed i carichi effettivi. Questa colonna di sinistra accoglie variabili di tipo deformativo, cioè la curvatura η'' lungo la trave (variabile distribuita), p. 145 FCM, la freccia f e la rotazione φ in punti particolari (variabili concentrate). Convienne evidenziare la freccia o la rotazione che si vuole calcolare. Nella colonna di destra si disegna la stessa geometria e vincoli della trave

effettiva, ma non si disegna **nessuno** dei carichi della trave effettiva. Occorre infatti caricare la trave con un carico fittizio unitario, detto carico esploratore, il quale deve lavorare rispetto alla freccia o rotazione da calcolare, la quale è stata opportunamente evidenziata nella colonna di sinistra. La trave della colonna di destra è quindi caricata in modo diverso dalla trave effettiva della colonna di sinistra, e la si può chiamare trave ausiliaria. La colonna di destra accoglie variabili di tipo tensionale, e cioè il momento flettente M_f , ed il carico esploratore, che deve essere una forza unitaria se si vuole calcolare una freccia nella trave effettiva, o una coppia unitaria se si vuole calcolare una rotazione

nella trave effettiva. Tale carico esploratore va applicato alla trave ausiliaria della colonna di destra nel punto nel quale si vuole calcolare freccia o rotazione nella trave della colonna di sinistra. Si impone infine $L_i=L_e$.

9 Nei tre teoremi per il calcolo di frecce e rotazioni, cioè nel PLV, in Castigliano, ed in Betti, si calcola un lavoro. Tale lavoro è fisicamente un vero lavoro, cioè una forza moltiplicata per uno spostamento di una stessa struttura, soltanto in Castigliano. Nel PLV si sottolinea che il lavoro formulato non è un vero lavoro, dato che esso viene calcolato riferendosi a due strutture diverse, chiamandolo virtuale; similmente in Betti, dove il lavoro viene calcolato riferendosi a due diverse strutture, si parla di lavoro mutuo. Infine, il teorema di Mohr si basa su una analogia per l'integrazione dell'equazione della linea elastica, si veda l'equazione (4.21) p. 146 FCM e p. 465 FCM, e non si basa sul calcolo di un lavoro.

10 Sia nel PLV che in Betti si calcola un lavoro considerando due strutture, e moltiplicando alcune variabili estratte da una struttura per altre variabili prese dall'altra struttura. Una differenza però è che nel PLV si calcola un **lavoro interno** ed un **lavoro esterno**; il lavoro interno si calcola considerando il prodotto di due variabili interne collegate ad M_f e definite lungo l'intera trave, integrando tale prodotto lungo l'intera trave; invece il lavoro esterno si calcola moltiplicando valori puntuali (quindi senza integrazione). In Betti si considera soltanto un **lavoro interno**, per il cui calcolo si moltiplicano valori puntuali.

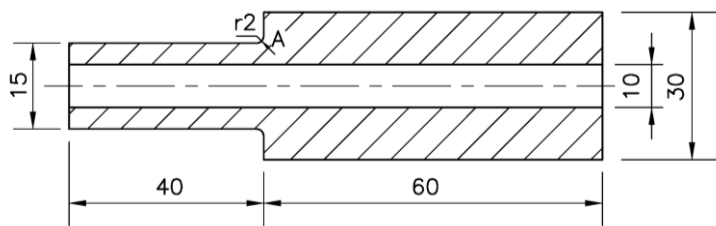
11 I matematici

I matematici tendono a dire che la trave non esiste, ma esiste soltanto il suo asse baricentrico (utile per determinare l'asse neutro, che passa per il baricentro) e le caratteristiche della sezione trasversale, utili per il calcolo delle tensioni, cioè A , J , J_p . In realtà, l'asse baricentrico non è sufficiente a descrivere l'asse della trave. Infatti, se una certa sezione è caricata da una forza, per calcolare il momento torcente occorre sapere per quale punto della sezione la forza deve passare per non produrre rotazione, ma solo traslazione tagliante, Figura 4.63 (n) p. 226 FCM. Se la forza non passa per tale punto, il prodotto tra forza e braccio, passante per tale punto e perpendicolare alla retta d'azione della forza, costituisce il momento torcente applicato a tale sezione. Tale punto si chiama centro di taglio, p. 225 FCM, ed è prossimo al baricentro soltanto per sezioni compatte. Per sezioni aperte, tipo una sezione a C, p. 228 FCM, il centro di

taglio è nettamente distinto dal baricentro. In conclusione, occorrerebbe introdurre due assi per la trave, un asse definito dal baricentro delle varie sezioni, e l'altro definito dal centro di taglio.

12 Sezione con spallamento: calcolo tensione e freccia.

Se si calcolano con la teoria della trave la tensione flessionale o torsionale in A, cioè in corrispondenza dello spigolo interno di una brusca variazione di sezione (spallamento) di un albero, si ottengono stime a sfavore della sicurezza, dato che nella realtà le tensioni sono molto maggiori di quelle derivate dalla teoria della trave. Infatti la presenza di uno spallamento, necessario per posizionare assialmente un cuscinetto, innalza in corrispondenza dello spigolo interno dello spallamento le tensioni rispetto a quelle calcolate con la teoria della trave, nell'ipotesi cioè che la sezione della trave non presenti brusche variazioni. Le tensioni effettive possono essere 2 o 3 volte superiori a quelle della teoria della trave, e quindi nella pratica occorre tener conto di questo valore maggiore



correggendo la stima tensionale fornita dalla teoria della trave. Questa metodologia correttiva viene svolta nel corso di Costruzione di Macchine.

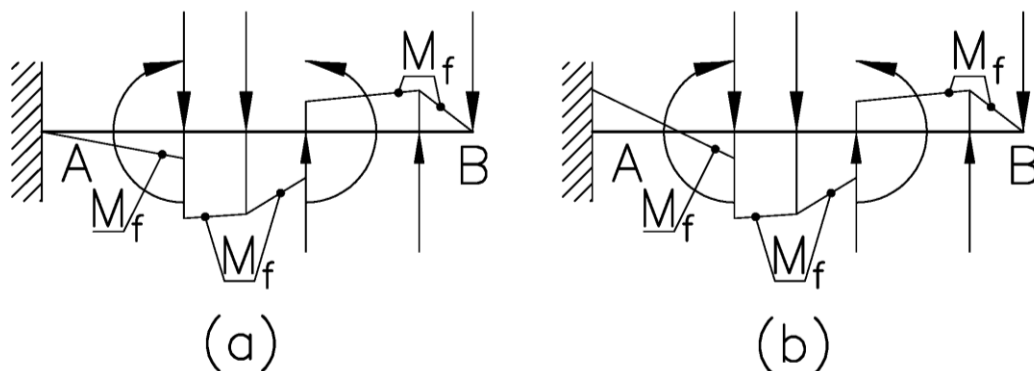
Se invece si calcola la freccia dell'albero con la teoria della trave, l'errore che si commette è molto inferiore a quello incontrato nel calcolo delle tensioni. Infatti le deformazioni (strettamente legate alle tensioni) sono inaccurate soltanto in un tratto assiale cortissimo, paragonabile al raggio di raccordo di 2 mm dello spigolo interno dello spallamento, mentre fuori da tale zona le deformazioni calcolate con la teoria della trave risultano sufficientemente accurate. La freccia della trave calcolata in zone di interesse sente l'effetto complessivo delle deformazioni (si pensi a Castigliano, ed al fatto che la freccia deriva da un integrale sull'intera lunghezza dell'albero), per cui nel caso del disegno l'errore sulla freccia è dell'ordine di 2 mm/100 mm, dove 100 mm sono la lunghezza dell'albero.

Si conclude osservando che al progettista interessa la tensione massima, la cui stima tramite la teoria della trave può risultare inaccurata in difetto in presenza di spallamenti. Invece la freccia calcolata con la teoria della trave è

molto più accurata anche in presenza di spallamenti, dato che l'errore sulle tensioni (e quindi sulle deformazioni) incide per un tratto assiale molto limitato, mentre il calcolo della freccia coinvolge le deformazioni lungo l'intera lunghezza dell'albero.

13 Andamento qualitativo di M_f in una trave

Il diagramma di M_f di Figura è stato ottenuto con la regola del filo, p. 513 di FMC. Il diagramma di Figura (a) è corretto, ma aver fatto andare a zero il diagramma di M_f all'incastro, punto A, costituisce una situazione troppo particolare, e quindi non realistica e fuorviante. Il diagramma (b), nel quale M_f non si annulla all'incastro A, è invece pienamente accettabile.



14 Deformata qualitativa in un portale

Si guardi p. 537 di FCM. Per ottenere una deformata qualitativa di un portale, si consiglia di indebolire gli spigoli della traversa introducendo cerniere, in modo da ottenere una deformata iniziale della traversa. Poi si ripristina la continuità della trave conservando l'angolo retto. Esaminando le reazioni alle estremità inferiori delle colonne, si cerca di capire se le colonne sono libere da momento flettente, oppure anche solo se il momento flettente non può cambiare di segno lungo le colonne, in modo che si possa escludere la presenza di flessi nelle colonne. Infine si controlla la continuità del segno della curvatura, eventualmente correggendo la deformata.

15 Sull'annullarsi di M_f dove la retta d'azione di una forza taglia l'asse della struttura

Si considera la struttura di Figura, inflessa dal carico P applicato in E . La retta d'azione di P interseca due volte l'asse della struttura, in E ed in B . Tuttavia l'andamento di M_f nell'intorno dei due punti è diverso. Nel tratto $F E$, M_f è nullo, mentre M_f non è nullo nel tratto $E D$. Nel punto E , nel quale il carico P è applicato, il diagramma di M_f presenta uno spigolo (tetto di casa), ed è in genere non nullo (si vedano gli esempi sul tracciamento qualitativo del momento flettente nelle travi, p. 513 di FCM), anche se in questo esempio M_f è nullo in E .

Invece nel punto B , per il quale passa la retta d'azione del carico P , ma il carico non è applicato in B , il diagramma di M_f non presenta uno spigolo, ma si annulla. Quindi nella deformata esiste un flesso collegato all'annullarsi di M_f . Concludendo, dove la retta d'azione di una forza taglia l'asse di una struttura, si ha uno spigolo in M_f dove il carico è applicato, anche se M_f è in genere non nullo, ed un semplice annullamento di M_f senza la presenza di uno spigolo dove il carico non è applicato.

