• Si considera la trave di lunghezza l, incastrata in B e caricata in A da una coppia concentrata C, Figura ? (a). Si vuole calcolare la freccia e la rotazione della trave nei punti A e D.

La Figura (b) mostra l'andamento costante del momento flettente, che vale C. La Figura (c) riporta la trave ausiliaria; seguendo la Tabella ??, l'incastro è diventato estremo libero, mentre l'estremo libero è diventato incastro. In Figura (d) la trave ausiliaria è stata caricata con il diagramma della curvatura $M_f/(EJ)$ della trave reale, di valore costante uguale a $C/(EJ)$.

Si considera dapprima il calcolo delle rotazioni in A e D. Tali rotazioni valgono il taglio nella trave ausiliaria. In A, il taglio vale $C/(EJ)\times l=Cl/(EJ)$. Per calcolare la rotazione in D, si calcola il taglio in D. Considerando (per esempio) il caricamento alla sinistra della sezione D, e cioè il caricamento tra i punti B e D, il taglio vale $C/(EJ)\times l/2= Cl/(2EJ)$.

Si considera nel seguito il calcolo della freccia della trave in A ed in D. Occorre calcolare il momento flettente in A e D nella trave ausiliaria. Per il calcolo della freccia in A, Figura (e), sostituisco al caricamento totale la sua risultante $Cl/(EJ)$. Il braccio di tale risultante rispetto ad A vale $l/2$. Il momento flettente nel punto A della trave ausiliaria vale forza per braccio, cioè $Cl/(EJ)\times l/2= Cl^2/(2EJ)$, che quindi rappresenta la freccia in A. Si considera infine la freccia nel punto D. Questa volta non devo considerare il caricamento totale, ma solo la parte (per esempio) alla sua sinistra, rappresentata in Figura (f), la cui risultante vale $Cl/(2EJ)$. Il braccio di tale risultante rispetto al punto D vale $l/4$, per cui la freccia in D vale $Cl/(2EJ)\times l/4= Cl^2/(8EJ)$.

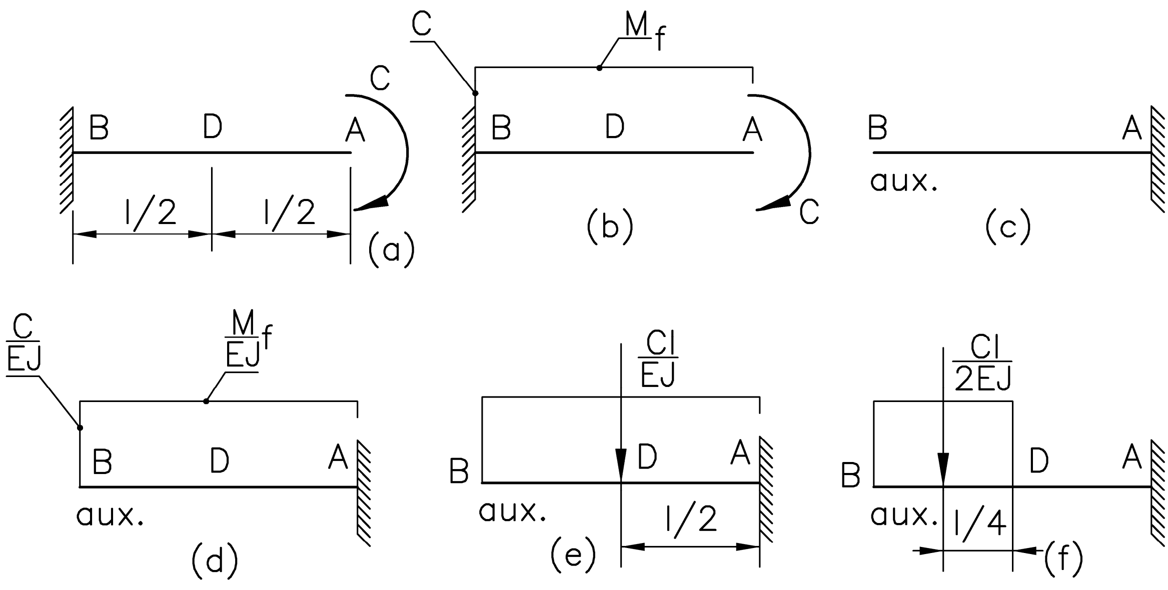

Figura ?

• Si considera la trave di lunghezza l, incastrata in B, libera in A, e caricata in D da una coppia concentrata C, Figura ? (a). Si vuole calcolare la freccia e la rotazione della trave nei punti A e D.

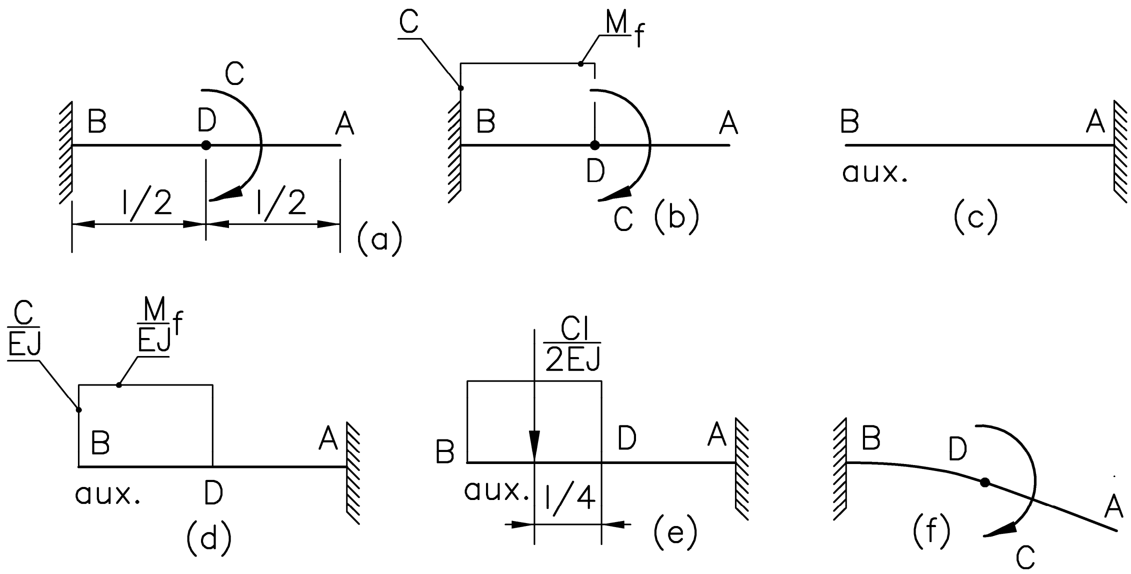

Figura ?

La Figura (b) mostra l'andamento del momento flettente, costante ed uguale a C nel tratto $B\ D$, e nullo nel tratto $D\ A$. La Figura (c) riporta la trave ausiliaria; seguendo la Tabella ??, l'incastro è diventato estremo libero, mentre l'estremo libero è diventato incastro. In Figura (d) la trave ausiliaria è stata caricata con il diagramma della curvatura $M_f/(EJ)$ della trave reale, di valore costante uguale a $C/(EJ)$ nel tratto $B\ D$e nullo nel tratto $D\ A$.

Si considera dapprima il calcolo delle rotazioni in A e D. Tali rotazioni valgono il taglio nella trave ausiliaria. In A e in D il taglio ha lo stesso valore, e vale $C/(EJ)\times l/2=Cl/(2EJ)$, che rappresenta quindi la rotazione in A ed in D. La Figura (f) presenta una deformata qualitativa della trave, che giustifica fisicamente il risultato per cui la rotazione rimane la stessa in A ed in D.

Si considera nel seguito il calcolo della freccia della trave in A ed in D. Occorre calcolare il momento flettente in A e D nella trave ausiliaria. Per il calcolo della freccia in A, Figura (e), sostituisco al caricamento totale la sua risultante $Cl/(2EJ)$. Il braccio di tale risultante rispetto ad A vale $l/4+l/2=3l/4$. Il momento flettente nel punto A della trave ausiliaria vale forza per braccio, cioè $Cl/(2EJ)\times 3l/4=3Cl^2/(8EJ)$. Si considera infine la freccia nel punto D. Il momento flettente in D vale la risultante $Cl/(2EJ)$ moltiplicata per il suo braccio rispetto a D, cioè $l/4$. Il momento flettente in D quindi vale $Cl/(2EJ)\times l/4=Cl^2/(8EJ)$, che rappresentala freccia in D nella trave reale.

• Si considera la trave di lunghezza $2l$, incernierata nei punti B e D, e caricata in A da una forza trasversale concentrata P, Figura ? (a). Si vuole calcolare la rotazione nei punti A, B, D, e la freccia in A.

La Figura (b) mostra l'andamento bi-triangolare del momento flettente, di valore massimo in B uguale a Pl. La Figura (c) riporta la trave ausiliaria secondo la Tabella ?. In Figura (d) la trave ausiliaria è caricata con il diagramma della curvatura $M_f/(EJ)$ della trave reale, ad andamento bi-triangolare con valore massimo $Pl/(EJ)$ in B. In Figura (d) è stato attribuito un verso di riferimento al caricamento bi-triangolare dato dalla curvatura.

In Figura (e) si sono rappresentate separatamente le due metà della trave. Nella metà di sinistra è rappresentata la risultante del caricamento triangolare della trave ausiliaria, che vale $1/2\times Pl/(EJ)\times l=Pl^2/(2EJ)$. Inoltre, nella metà di sinistra sono rappresentate le due reazioni vincolari, che valgono in D 1/3 della risultante risultante, e quindi $Pl^2/(6EJ)$, ed in B 2/3 della risultante, e quindi $Pl^2/(3EJ)$. Tali reazioni vincolari eguagliano il taglio in B ed in D nella trave

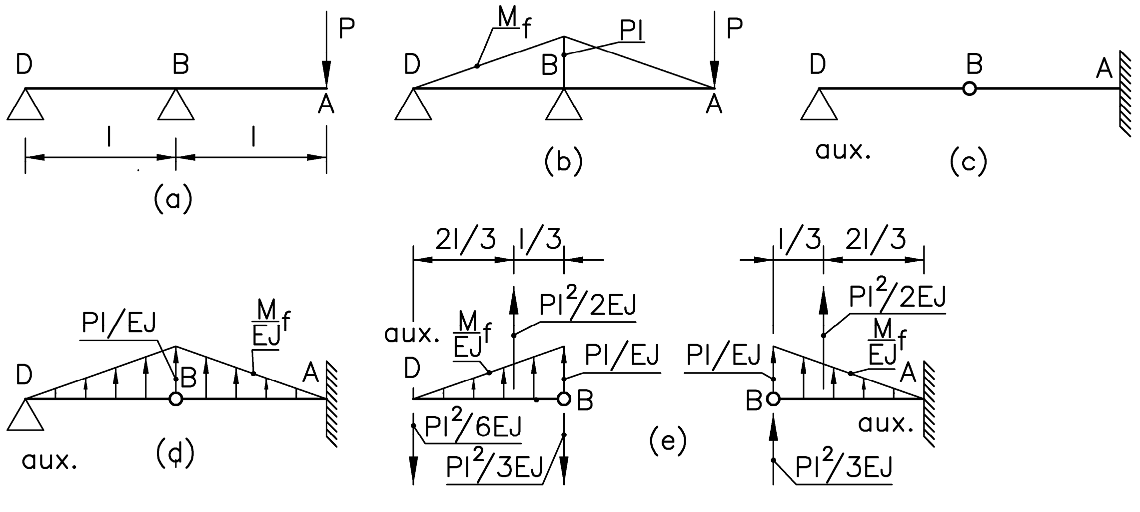

Figura ?

ausiliaria, e quindi esprimono la rotazione nella trave reale. In conclusione, $\varphi_B=Pl^2/(3EJ)$ e $\varphi_D=Pl^2/(6EJ)$.

Nel seguito si considera il calcolo della freccia e della rotazione in A. Occorre a tal fine considerare la metà destra della trave, Figura (e). In B, interpretato come facente parte della metà destra della trave, agisce l'opposto della reazione che agisce in B interpretato come facente parte della metà sinistra della trave (principio di azione-reazione). Tale reazione vale $Pl^2/(3EJ)$. La risultante del caricamento triangolare che agisce sulla metà destra della trave è uguale alla risultante già calcolata del caricamento triangolare che agisce sulla metà sinistra della trave, e vale $Pl^2/(2EJ)$. Il taglio in A nella metà destra della trave ausiliaria vale quindi la somma (i due versi sono concordi) della reazione in B, cioè $Pl^2/(3EJ)$, e della risultante del caricamento triangolare, cioè $Pl^2/(2EJ)$. In conclusione, il taglio in A nella trave ausiliaria vale $5Pl^2/(6EJ)$, e rappresenta la rotazione nella trave reale.

La freccia in A si calcola determinando il momento flettente in A nella trave ausiliaria, Figura (e). Riferendosi alla metà destra della trave ausiliaria, il momento flettente in A vale la reazione in B, cioè $Pl^2/(3EJ)$, moltiplicata per il suo braccio rispetto ad A, che vale l, sommata alla risultante del caricamento triangolare, cioè $Pl^2/(2EJ)$, moltiplicata per il suo braccio rispetto ad A, che vale $2l/3$. Il momento flettente nella trave ausiliaria in A vale quindi $Pl^2/(3EJ)\times l+ Pl^2/(2EJ)\times 2l/3= 2Pl^3/(3EJ)$.

• Si considera la trave di lunghezza *l*, incastrata in *B*, supportata in *D*, e caricata in *A* da una coppia concentrata *C*, Figura ? (a). Si vuole risolvere questa struttura, e calcolare la freccia in *A*.

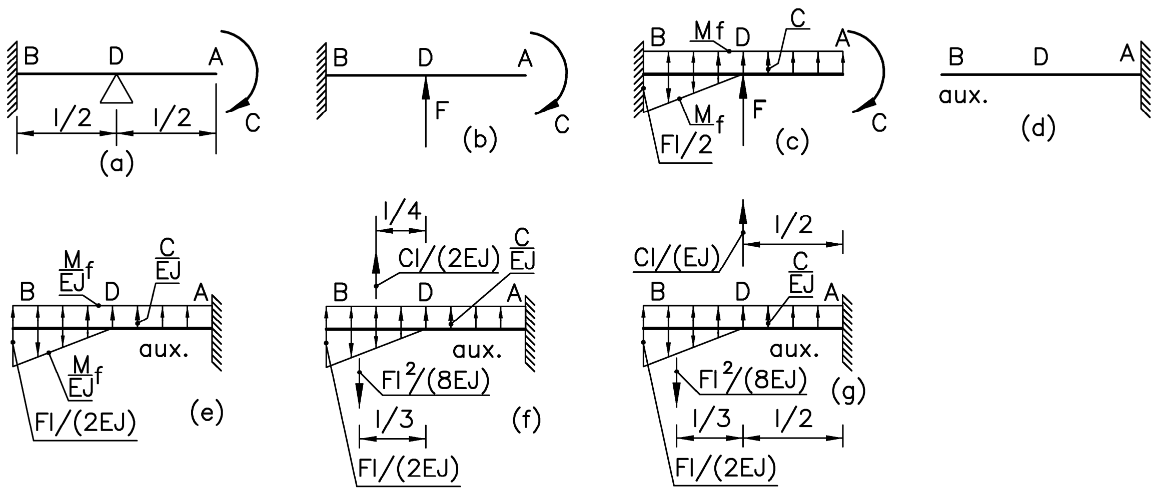

Figura ?

Si risolve dapprima la struttura una volta iperstatica. La Figura (b) mostra lo svincolamento in *D*, dove all'appoggio si è sostituita la reazione vincolare *F*, incognita. La Figura (c) mostra l'andamento del momento flettente nella trave reale, dove i due contributi del momento flettente, uno, costante, dovuto alla coppia *C*, ed uno, triangolare, dovuto alla forza *F*, sono stati rappresentati separati, e con versi opposti, dato che le corrispondenti curvature sono opposte. La Figura (d) mostra la trave ausiliaria, in accordo con la Tabella ?. La Figura (e) mostra la trave ausiliaria caricata dai diagrammi delle curvature. Siccome l'abbassamento in *D* nella trave reale è nullo a causa della presenza dell'appoggio, in *D* nella trave ausiliaria deve annullarsi il momento flettente. La Figura (f) mostra le risultanti delle due aree dei caricamenti costanti e triangolari, considerando soltanto il caricamento alla sinistra della sezione in *D*. Il momento flettente in *D* vale la risultante del caricamento costante, $Cl/(2EJ)$, per il braccio della risultante rispetto a *D*, $l/4$, meno la risultante del caricamento triangolare, $Fl^2/(8EJ)$, per il braccio della risultante rispetto a *D*, $l/3$. L'imposizione che tale momento flettente si annulli in *D* produce l'equazione $Cl/(2EJ)\times l/4-Fl^2/(8EJ)\times l/3=0$, da cui $F=3C/l$. Si è così risolta l'iperstatica.

Si passa ora al calcolo della freccia in *A*. La freccia in *A* nella trave reale eguaglia il momento flettente in *A* nella trave ausiliaria. La Figura (g) mostra la risultante del caricamento costante alla sinistra della sezione in *A*, e cioè la risultante dell'intero caricamento costante, $Cl/(EJ)$, moltiplicata per il suo braccio rispetto ad A, $l/2$, meno la risultante del caricamento triangolare, $Fl^2/(8EJ)$, moltiplicata per il suo braccio rispetto ad A, $l/3+l/2$. Ricordando che $F=3C/l$, il momento flettente in A nella trave ausiliaria vale $Cl/(EJ)\times l/2-(3C/l)l^2/(8EJ)\times(l/3+l/2)=3Cl^2/(16EJ)$. Questo è il valore della freccia in A nella trave reale.

• Si considera la trave di lunghezza l, doppiamente incastrata in A e B, e caricata in D da una forza trasversale concentrata P, eccentrica rispetto alla mezzeria della traversa, Figura ? (a). Si vuole risolvere questa struttura, e calcolare la freccia in D.

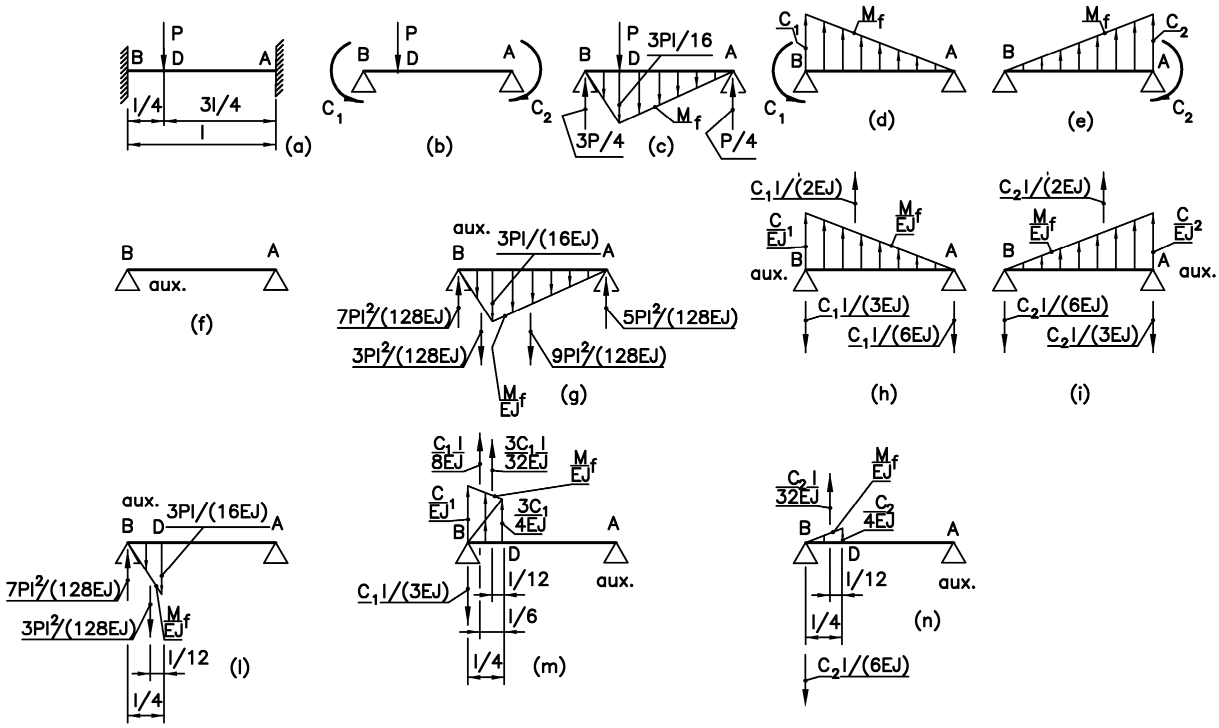

Figura ?

Questa struttura è due volte iperstatica e due volte staticamente indeterminata.

La Figura (b) mostra la trave svincolata, dove agli incastri vengono sostituite delle cerniere, e le corrispondenti coppie di incastro C_1 e C_2, incognite, vengono applicate ai punti B ed A. Per chiarezza, il diagramma del momento flettente è disegnato separatamente per i tre caricamenti P, C_1 e C_2, rispettivamente nelle Figure (c), (d), ed (e). La Figura (f) mostra la trave ausiliaria della trave doppiamente appoggiata di Figura (b), che coincide con la trave reale. Le Figure (g), (h), ed (i) mostrano il caricamento della trave ausiliaria in termini di $M_f/(EJ)$, per i tre momenti dovuti rispettivamente a P, C_1 e C_2. Per ogni caricamento, sono rappresentate nella trave ausiliaria le risultanti delle varie aree triangolari, e le reazioni vincolari. Il valore corretto delle coppie di incastro incognite C_1 e C_2 è quello per cui nella trave reale si ha rotazione nulla in A e B, e quindi nella trave ausiliaria si ha taglio nullo in A e B. Riferendosi alle Figure (g), (h), ed (i), in B la caratteristica di sollecitazione di taglio, posta uguale a zero, vale:

$$\frac{7Pl^2}{128EJ} - \frac{C_1 l}{3EJ} - \frac{C_2 l}{6EJ} = 0$$

mentre in A il taglio, posto uguale a zero, vale:

$$\frac{5Pl^2}{128EJ}-\frac{C_1 l}{6EJ}-\frac{C_2 l}{3EJ}=0$$

La risoluzione del precedente sistema fornisce le espressioni di C_1 e C_2 in termini di P:

$$C_1=\frac{9Pl}{64} \quad ; \quad C_2=\frac{3Pl}{64}$$

La struttura due volte staticamente indeterminata è stata così risolta.

Si considera nel seguito il calcolo della freccia in D. che coincide con il momento flettente in D nella trave ausiliaria. Le Figure (l), (m), ed (n) riportano il caricamento in termini di curvatura $M_f/(EJ)$ della trave ausiliaria, rappresentato separatamente per i tre caricamenti P, C_1 e C_2, e le corrispondenti reazioni vincolari nella trave ausiliaria. Per chiarezza, solo la parte di caricamento, in termini di curvatura, che sta alla sinistra del punto D, è stato rappresentato nelle Figure (l), (m), ed (n). Sono state rappresentate anche le risultanti delle varie aree triangolari, ed il loro braccio rispetto a D. Per semplificare i calcoli, il caricamento trapezoidale distribuito tra i punti B e D di Figura (m) è stato diviso in due caricamenti triangolari.

Il momento flettente in D, M_{fD}, nella trave ausiliaria vale quindi la somma di tre contributi relativi alle Figure (l), (m), ed (n), dove i tre contributi sono stati evidenziati con parentesi quadre:

$$M_{fD}=\left[\frac{7Pl^2}{128EJ}\times\frac{l}{4}-\frac{3Pl^2}{128EJ}\times\frac{l}{12}\right]+\left[-\frac{C_1 l}{3EJ}\times\frac{l}{4}+\frac{C_1 l}{8EJ}\times\frac{l}{6}+\frac{3C_1 l}{32EJ}\times\frac{l}{12}\right]+\left[-\frac{C_2 l}{6EJ}\times\frac{l}{4}+\frac{C_2 l}{32EJ}\times\frac{l}{12}\right]$$

La parentesi quadra centrale contiene tre termini, mentre le altre parentesi quadre contengono due termini. I due termini si riferiscono uno al momento dovuto alla risultante, e l’altro al momento dovuto al carico triangolare distribuito. La parentesi centrale si riferisce alla Figura (m), nella quale il caricamento trapezoidale distribuito tra i punti B e D di Figura (m) è stato diviso in due caricamenti triangolari.

Svolgendo i calcoli, si ha:

$$M_{fD}=\left[\frac{3Pl^3}{256EJ}\right]+\left[-\frac{7C_1 l^2}{128EJ}\right]+\left[-\frac{5C_2 l^2}{128EJ}\right]$$

Sostituendo a C_1 e C_2 le loro espressioni in termini di P precedentemente calcolate, si ottiene:

$$M_{fD}=\frac{9Pl^3}{4096EJ}$$

che quindi rappresenta la freccia in D nella trave reale.

Questo esercizio è risolto nel Capitolo sul teorema di Castigliano, impiegando un diverso svincolamento.