

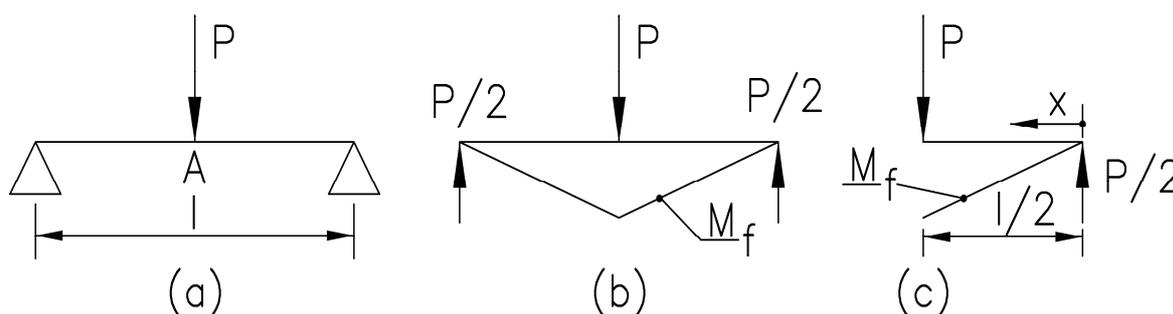
IL TEOREMA DI CASTIGLIANO

Versione preliminare Dicembre 2013

Il teorema di Castigliano permette di a) calcolare frecce e rotazioni in strutture (trabeiformi) isostatiche, e b) risolvere strutture iperstatiche, cioè calcolare le reazioni vincolari iperstatiche e le caratteristiche di sollecitazione iperstatiche. Una volta risolta la struttura iperstatica, Castigliano permette di calcolare frecce e rotazioni anche nella struttura iperstatica.

1 Esempi di calcoli di frecce e rotazioni in travi isostatiche tramite Castigliano

1.1 Si considera la trave di Figura 1.1, di lunghezza l , sostenuta da due appoggi a cerniera di estremità, e soggetta ad un carico concentrato trasversale centrale P , Figura (a). Si vuole determinare la freccia f_A del centro della trave, punto A.



Le due reazioni vincolari $P/2$ sono evidenziate in Figura (b). Non si prevedono invece reazioni vincolari orizzontali agli appoggi, dove questa è una approssimazione generalmente lecita.

Il diagramma del Momento Flettente M_f è rappresentato in Figura (b). Siccome M_f è simmetrico rispetto al centro della trave, il calcolo dell'energia interna U dell'intera struttura può venire sveltito calcolando l'energia interna su metà struttura, Figura (c), e poi raddoppiandone il valore. Convien scegliere come origine della coordinata x un estremo della trave, Figura (c), e non il centro della trave, perché così l'espressione di M_f , che si annulla alle estremità della trave, diventa particolarmente semplice.

Il momento flettente M_f , l'energia interna U , e la freccia (verticale) f_A valgono:

$$M_f(x) = \frac{P}{2}x$$

$$U = 2 \times \int_0^{l/2} \frac{M_f^2}{2EJ} dx = 2 \times \int_0^{l/2} \frac{\left(\frac{P}{2}x\right)^2}{2EJ} dx = 2 \times \frac{P^2}{4 \times 2EJ} \int_0^{l/2} x^2 dx = \frac{P^2}{4EJ} \frac{x^3}{3} \Big|_0^{l/2} = \frac{P^2}{4EJ} \frac{l^3}{3 \times 8} = \frac{P^2 l^3}{96EJ}$$

$$f_A = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{2Pl^3}{96EJ} = \frac{Pl^3}{48EJ}$$

1.2 Si considera la trave di Figura 1.2, di lunghezza l , sostenuta da due appoggi a cerniera di estremità, e soggetta ad un carico concentrato trasversale **non** centrale P , Figura (a). Il punto A dista dall'appoggio di sinistra di $l/3$, e dall'appoggio di destra di $2/3l$. Si vuole determinare la freccia f_A della trave nel punto A di applicazione del carico P .

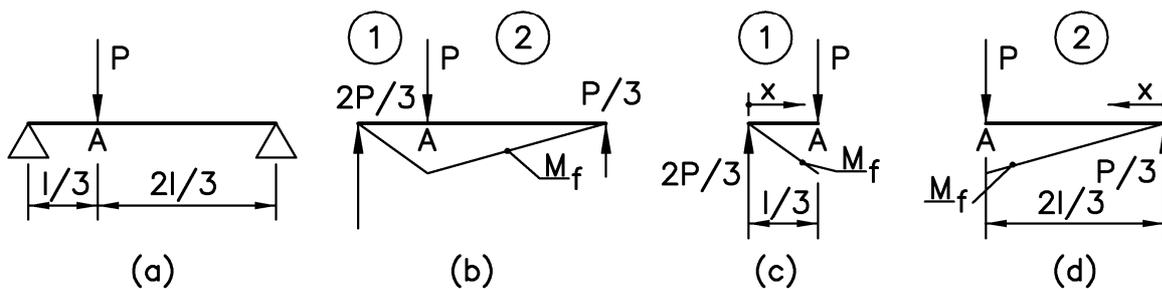


Figura 1.2

Il diagramma del Momento Flettente M_f è rappresentato in Figura (b). Questo problema non è simmetrico, dato che il carico P non è applicato in mezziera della trave. Occorre perciò studiare separatamente i due tratti (1) e (2) della trave, mostrati in Figura (b).

Tratto (1). Il diagramma del Momento Flettente $M_{f,1}$ è rappresentato in Figura (c). Scegliendo come origine della coordinata x l'estremo sinistro della trave, il momento flettente $M_{f,1}$ e l'energia interna U_1 valgono:

$$M_{f,1}(x) = \frac{2P}{3}x$$

$$U_1 = \int_0^{l/3} \frac{M_f^2}{2EJ} dx = \int_0^{l/3} \frac{\left(\frac{2P}{3}x\right)^2}{2EJ} dx = \frac{4P^2}{9 \times 2EJ} \int_0^{l/3} x^2 dx = \frac{2P^2}{9EJ} \frac{x^3}{3} \Big|_0^{l/3} = \frac{2P^2}{9EJ} \frac{l^3}{3 \times 27} = \frac{2P^2 l^3}{729EJ}$$

Tratto (2). Il diagramma del Momento Flettente $M_{f,2}$ è rappresentato in Figura (d). Scegliendo come origine della coordinata x l'estremo destro della trave, il momento flettente $M_{f,2}$ e l'energia interna U_2 valgono:

$$M_{f,2}(x) = \frac{P}{3}x$$

$$U_2 = \int_0^{2l/3} \frac{M_f^2}{2EJ} dx = \int_0^{2l/3} \frac{\left(\frac{P}{3}x\right)^2}{2EJ} dx = \frac{P^2}{9 \times 2EJ} \int_0^{2l/3} x^2 dx = \frac{P^2}{18EJ} \frac{x^3}{3} \Big|_0^{2l/3} = \frac{P^2}{18EJ} \frac{8l^3}{3 \times 27} = \frac{4P^2 l^3}{729EJ}$$

L'energia interna totale U vale

$$U = U_1 + U_2 = \frac{2P^2 l^3}{729EJ} + \frac{4P^2 l^3}{729EJ} = \frac{2P^2 l^3}{243EJ}$$

La freccia f_A vale

$$f_A = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{4Pl^3}{243EJ}$$

1.3 Si considera la trave a sbalzo di Figura 1.3, di lunghezza l , incastrata ad una estremità, ed inflessa da una coppia concentrata C applicata all'altra estremità. Si vuole determinare la rotazione φ_A della trave nel punto A di applicazione della coppia C .

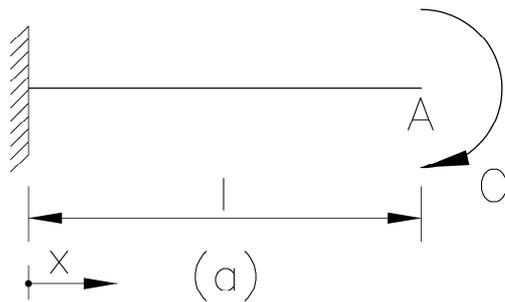


Figura 1.3

Il diagramma del Momento Flettente M_f rimane costante lungo la trave. Si assume l'origine della coordinata x dall'incastro. (Scegliere l'origine da A l'espressione di M_f non cambierebbe, dato che il diagramma di M_f è costante.) Il momento flettente M_f , l'energia interna U , e la rotazione φ_A valgono:

$$M_f(x) = C$$

$$U = \int_0^l \frac{M_f^2}{2EJ} dx = \int_0^l \frac{C^2}{2EJ} dx = \frac{C^2}{2EJ} \int_0^l dx = \frac{C^2 l}{2EJ}$$

$$\varphi_A = \frac{\partial U}{\partial C} = \frac{Cl}{EJ}$$

1.4 Si considera la trave a sbalzo di Figura 1.4, di lunghezza l , incastrata ad una estremità, e caricata all'altra estremità A da una forza trasversale concentrata P e da una coppia concentrata C . Si vuole determinare la freccia f_A e la rotazione φ_A della trave nel punto A di applicazione del carico.

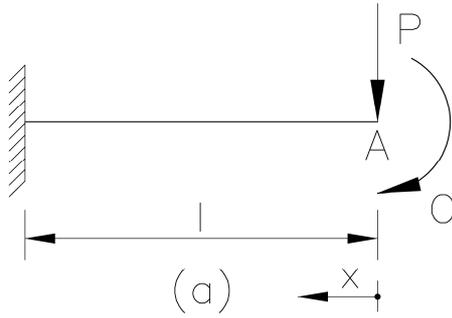


Figure 1.4

Conviene scegliere come origine della coordinata x l'estremo della trave dove è applicata la forza concentrata, perché così la parte dell'espressione di M_f dovuta a P diventa più semplice.

Il momento flettente M_f , l'energia interna U , la freccia f_A e la rotazione φ_A valgono:

$$M_f(x) = Px + C$$

$$U = \int_0^l \frac{M_f^2}{2EJ} dx = \int_0^l \frac{(Px + C)^2}{2EJ} dx = \frac{1}{2EJ} \int_0^l (P^2 x^2 + C^2 + 2PCx) dx = \frac{1}{2EJ} \left(P^2 \frac{l^3}{3} + C^2 l + 2PC \frac{l^2}{2} \right)$$

$$f_A = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{1}{2EJ} \left(2P \frac{l^3}{3} + 2C \frac{l^2}{2} \right)$$

$$\varphi_A = \frac{\partial U}{\partial C} = \frac{1}{2EJ} \left(2Cl + 2P \frac{l^2}{2} \right)$$

Si noti che M_f vale $Px+C$ e non $Px-C$, dato che P e C , considerati singolarmente, producono un effetto concorde sulle fibre longitudinali della trave. Infatti, sia P che C producono un allungamento delle fibre superiori della trave. Invece, se avessi assunto $M_f = -Px-C$, invertendo la convenzione sul segno del momento flettente assunta precedentemente, l'energia interna non sarebbe cambiata, dato essa che viene calcolata quadrando il momento flettente. (L'energia interna deve rimanere positiva.)

Nei passaggi precedenti l'energia interna U è stata derivata rispetto a P ed a C . Quando si deriva U rispetto a P , i termini di U che non contengono P sono nulli, e quindi scompaiono dalle formule. Similmente, quando si deriva U rispetto a C , i termini di U che non contengono C sono nulli.

1.5 Si considera la trave di Figura 1.5, di lunghezza l , incernierata alle due estremità, e soggetta ad una coppia concentrata C applicata ad una estremità, Figura (a). Si vuole calcolare la rotazione dell'estremità della trave A soggetta alla coppia C .

Le due reazioni vincolari sono uguali ed opposte, dato che esse devono fornire un "effetto coppia", devono cioè equilibrare la coppia C . Il momento flettente parte da zero sull'appoggio di sinistra, mentre a destra, dove è

applicata la coppia C , esso non è nullo, dato che il diagramma di M_f presenta un gradino in corrispondenza dell'applicazione di una coppia concentrata, Figura (b).

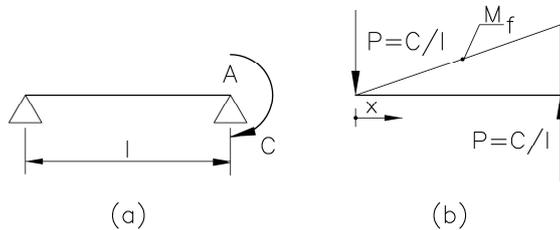


Figura 1.5

Conviene scegliere come origine della coordinata x l'estremo della trave non caricato dalla coppia C , Figura b, perché da tale punto l'espressione di M_f parte da zero.

Il momento flettente M_f , l'energia interna U , e la rotazione φ_A valgono:

$$M_f(x) = \frac{C}{l}x$$

$$U = \int_0^l \frac{M_f^2}{2EJ} dx = \int_0^l \frac{\left(\frac{C}{l}x\right)^2}{2EJ} dx = \frac{1}{2EJ} \frac{C^2}{l^2} \int_0^l x^2 dx = \frac{1}{2EJ} \frac{C^2}{l^2} \frac{l^3}{3} = \frac{C^2 l}{6EJ}$$

$$\varphi_A = \frac{\partial U}{\partial C} = \frac{Cl}{3EJ}$$

1.6 Si considera la trave di Figura 1.6, di lunghezza l , incernierata alle due estremità, e soggetta ad una coppia concentrata C applicata al centro della trave, punto A, Figura (a). Si vuole calcolare la rotazione della trave in A.

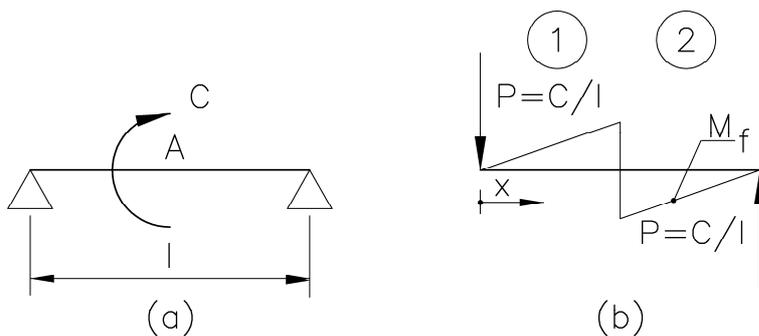


Figura 1.6

Le due reazioni vincolari sono uguali ed opposte, dato che esse devono fornire un "effetto coppia", devono cioè equilibrare la coppia C . Il momento flettente M_f è uguale ed opposto sui due tratti (1) e (2) di Figura (b), cioè ha un

andamento antisimmetrico. L'energia interna U è invece uguale sui due tratti (1) e (2) di Figura (b) (cioè ha un andamento simmetrico), dato che l'energia interna dipende dal quadrato di M_f , che cancella la diversità di segno di M_f nei due tratti (1) e (2). L'energia interna totale può quindi venire valutata raddoppiando il suo valore calcolato per metà struttura, e cioè sul tratto (1) o (2).

Per il tratto (1), il momento flettente $M_{f,1}$ e l'energia interna U_1 valgono

$$M_{f,1}(x) = \frac{C}{l} x$$

$$U_1 = \int_0^{l/2} \frac{M_f^2}{2EJ} dx = \int_0^{l/2} \frac{\left(\frac{C}{l} x\right)^2}{2EJ} dx = \frac{1}{2EJ} \frac{C^2}{l^2} \int_0^{l/2} x^2 dx = \frac{1}{2EJ} \frac{C^2}{l^2} \frac{l^3}{3 \times 8} = \frac{C^2 l}{48EJ}$$

L'energia interna totale è il doppio di quella del tratto (1)

$$U = U_1 + U_2 = 2U_1 = \frac{C^2 l}{24EJ}$$

La rotazione della trave in A vale

$$\varphi_A = \frac{\partial U}{\partial C} = \frac{Cl}{12EJ}$$

1.7 Si considera la trave a sbalzo di Figura 1.7, di lunghezza l , incastrata ad una estremità, e soggetta ad una forza concentrata trasversale P applicata al centro della trave, punto B , Figura (a). Si vuole calcolare la freccia della trave all'estremità libera (cioè non vincolata), punto A .

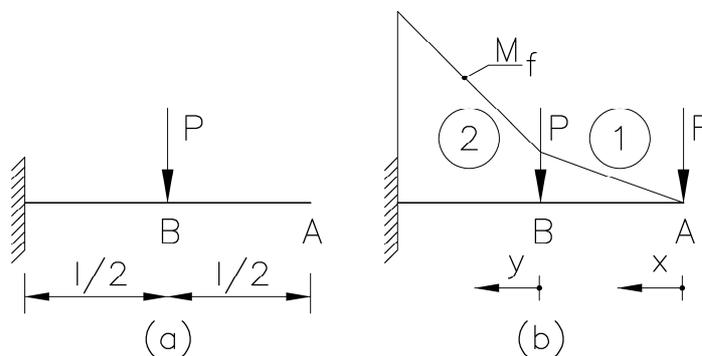


Figura 1.7

Il teorema di Castigliano fornisce con immediatezza la freccia di una trave in corrispondenza di un punto caricato da una forza concentrata, e la rotazione di una trave in corrispondenza di un punto caricato da una coppia concentrata. In questo esercizio si richiede di calcolare la freccia nel

punto A , non caricato da una forza concentrata. Occorre quindi adattare il caricamento, introducendo una forza fittizia F nel punto nel quale si vuole calcolare la freccia della trave. Solo al termine delle calcolazioni, e cioè dopo aver calcolato il momento flettente e l'energia interna, ed aver derivato l'energia interna U rispetto ad F , si esprimerà il fatto che F non esiste, ponendo $F=0$.

Conviene considerare separatamente i due tratti (1) e (2) di Figura (b).

Tratto (1): Il diagramma del Momento Flettente $M_{f,1}$ è rappresentato in Figura (b). Scegliendo come origine della coordinata x l'estremo sinistro della trave, il momento flettente $M_{f,1}$ e l'energia interna U_1 valgono:

$$M_{f,1}(x) = Fx$$

$$U_1 = \int_0^{l/2} \frac{M_{f,1}^2}{2EJ} dx = \int_0^{l/2} \frac{(Fx)^2}{2EJ} dx = \frac{F^2}{2EJ} \int_0^{l/2} x^2 dx = \frac{F^2}{2EJ} \frac{x^3}{3} \Big|_0^{l/2} = \frac{F^2}{2EJ} \frac{l^3}{3 \times 8} = \frac{F^2 l^3}{48EJ}$$

Tratto (2): Il diagramma del Momento Flettente $M_{f,2}$ è rappresentato in Figura (b). Scegliendo come origine della coordinata y il punto di applicazione della forza P , e cioè il centro della trave, il momento flettente $M_{f,2}$ e l'energia interna U_2 valgono:

$$M_{f,2}(x) = Py + F\left(y + \frac{l}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} U_2 &= \int_0^{l/2} \frac{M_{f,2}^2}{2EJ} dy = \int_0^{l/2} \frac{\left(Py + F\left(y + \frac{l}{2}\right)\right)^2}{2EJ} dy = \\ &= \frac{1}{2EJ} \int_0^{l/2} \left(P^2 y^2 + F^2 y^2 + F^2 \frac{l^2}{4} + 2F^2 y \frac{l}{2} + 2PFy^2 + 2PFy \frac{l}{2} \right) dy = \\ &= \frac{1}{2EJ} \left(P^2 \frac{l^3}{3 \times 8} + F^2 \frac{l^3}{3 \times 8} + F^2 \frac{l^2}{4} \frac{l}{2} + 2F^2 \frac{l}{2} \frac{l^2}{2 \times 4} + 2PF \frac{l^3}{3 \times 8} + 2PF \frac{l}{2} \frac{l^2}{2 \times 4} \right) = \\ &= \frac{1}{2EJ} \left(P^2 \frac{l^3}{24} + F^2 \frac{l^3}{24} + F^2 \frac{l^3}{8} + F^2 \frac{l^3}{8} + PF \frac{l^3}{12} + PF \frac{l^3}{8} \right) = \\ &= \frac{1}{48EJ} (P^2 l^3 + 7F^2 l^3 + 5PF l^3) \end{aligned}$$

L'energia interna totale U vale

$$U = U_1 + U_2 = \frac{F^2 l^3}{48EJ} + \frac{1}{48EJ} (P^2 l^3 + 7F^2 l^3 + 5PF l^3) = \frac{1}{48EJ} (P^2 l^3 + 8F^2 l^3 + 5PF l^3)$$

La freccia nel punto A si ottiene differenziando l'energia interna U rispetto alla forza fittizia F , ed infine ponendo nulla la forza fittizia, $F=0$.

$$f_A = \frac{\partial U}{\partial F} \Big|_{F=0} = \frac{1}{48EJ} (16Fl^3 + 5Pl^3) \Big|_{F=0} = \frac{1}{48EJ} 5Pl^3 = \frac{5Pl^3}{48EJ}$$

Si osserva che porre $F=0$ è l'ultima operazione da compiere nei calcoli. Il teorema di Castigliano impone di derivare rispetto ad una variabile, che è una forza o una coppia. Se imponessi $F=0$ in una fase iniziale dei calcoli, non potrei poi derivare rispetto ad un numero, in questo caso il numero 0.

I calcoli precedenti possono venire eseguiti con il supporto di un manipolatore algebrico. Questi programmi effettuano, oltre ad operazioni algebriche, anche operazioni analitiche, quali derivate ed integrali.

1.8 Si considera la trave a sbalzo di Figura 1.8, di lunghezza l , incastrata ad una estremità, e soggetta ad un carico concentrato P applicato all'altra estremità, punto A , Figura (a). Si vuole calcolare la rotazione della trave in A .

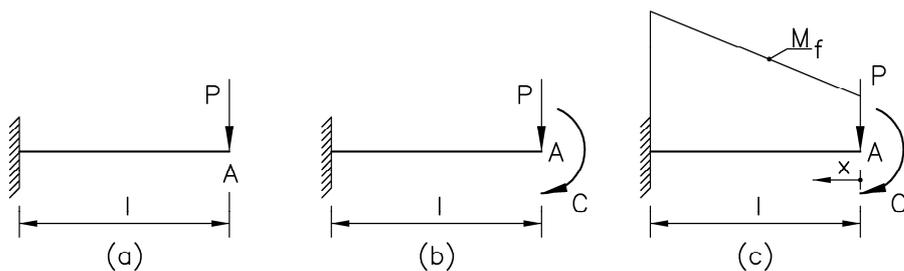


Figura 1.8

Il teorema di Castigliano fornisce con immediatezza la freccia di una trave in corrispondenza di un punto

caricato da una forza concentrata, e la rotazione di una trave in corrispondenza di un punto caricato da una coppia concentrata. In questo esercizio si richiede di calcolare la rotazione nel punto A, non caricato da una coppia concentrata. Occorre quindi adattare il caricamento, introducendo una coppia concentrata fittizia C nel punto nel quale si vuole calcolare la rotazione della trave, Figura (b). Solo al termine delle calcolazioni, e cioè dopo aver derivato l'energia interna U rispetto a C, si esprimerà il fatto che C è una coppia fittizia, ponendo C=0.

Il diagramma del Momento Flettente M_f è rappresentato in Figura (c). Scegliendo come origine della coordinata x l'estremo destro della trave, punto A, il momento flettente M_f e l'energia interna U valgono:

$$M_f(x) = Px + C$$

$$U = \int_0^l \frac{M_f^2}{2EJ} dx = \int_0^l \frac{(Px + C)^2}{2EJ} dx = \frac{1}{2EJ} \int_0^l (P^2 x^2 + C^2 + 2PCx) dx =$$

$$\frac{1}{2EJ} \left(P^2 \frac{l^3}{3} + C^2 l + 2PC \frac{l^2}{2} \right)$$

La rotazione nel punto A si ottiene differenziando l'energia interna U rispetto alla coppia fittizia C, ed infine ponendo nulla la coppia fittizia, C=0.

$$\varphi_A = \left. \frac{\partial U}{\partial C} \right|_{C=0} = \frac{1}{2EJ} \left(2Cl + 2P \frac{l^2}{2} \right)_{C=0} = \frac{Pl^2}{2EJ}$$

1.9 Si considera la trave di Figura 1.9, di lunghezza l , incernierata alle estremità, e soggetta ad un carico concentrato P applicato al centro, punto A, Figura (a). Si vuole calcolare la rotazione della trave in B.

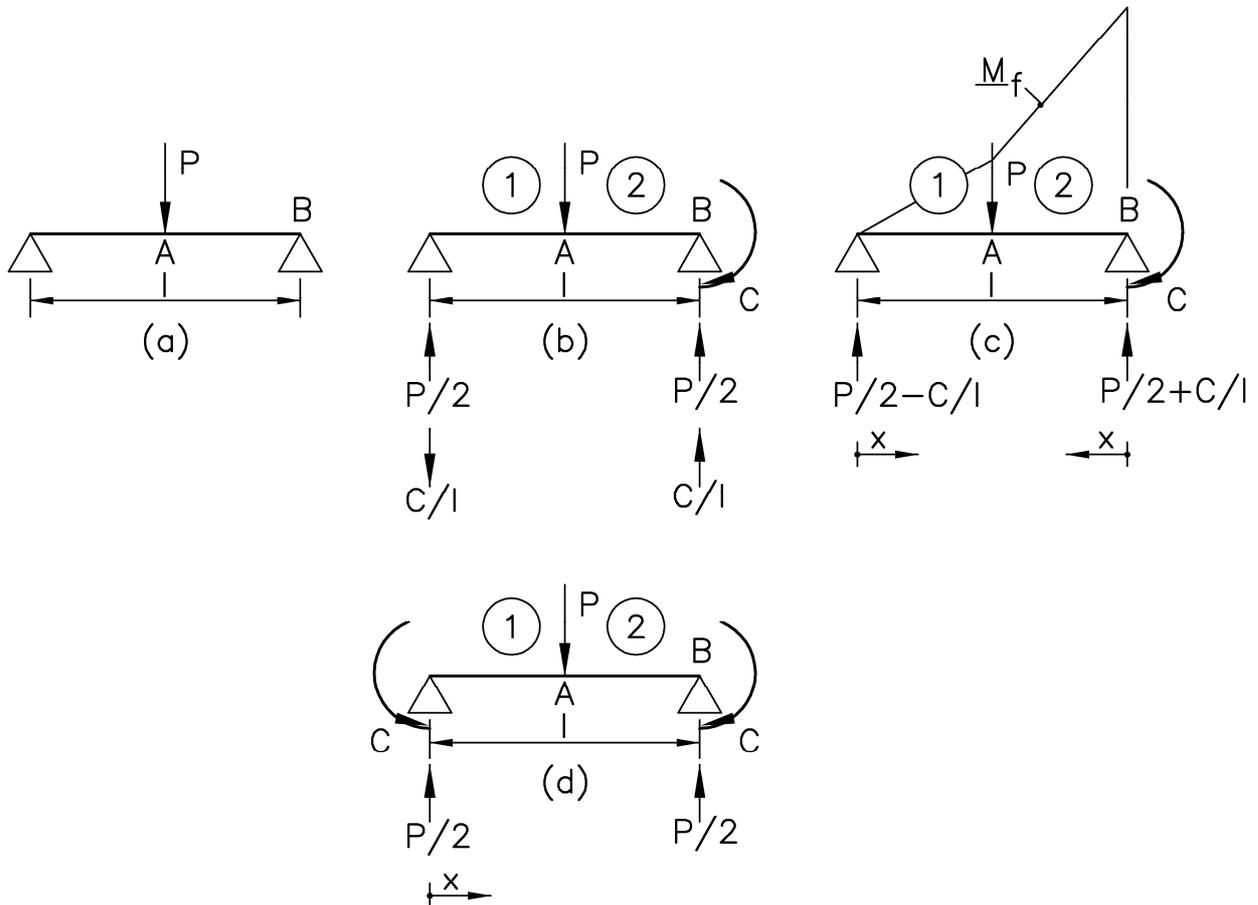


Figura 1.9

Come già visto negli esercizi precedenti, occorre adattare il caricamento, introducendo una coppia concentrata fittizia C nel punto nel quale si vuole calcolare la rotazione della trave, Figura (b). Solo al termine delle calcolazioni, e cioè dopo aver derivato l'energia interna U rispetto a C , si esprimerà il fatto che C è una coppia fittizia, ponendo $C=0$.

Le reazioni di contatto sono rappresentate nella Figura (b). Il diagramma del Momento Flettente M_f è rappresentato in Figura (c). Conviene considerare separatamente i due tratti (1) e (2) di Figura (c). Scegliendo come origine delle due coordinate x le estremità della trave, il momento flettente M_f e l'energia interna U vengono calcolati separatamente per i due tratti.

Tratto 1:

$$M_{f,1}(x) = \left(\frac{P}{2} - \frac{C}{l} \right) x$$

$$U_1 = \int_0^{l/2} \frac{M_{f,1}^2}{2EJ} dx = \int_0^{l/2} \frac{\left[\left(\frac{P}{2} - \frac{C}{l} \right) x \right]^2}{2EJ} dx = \frac{1}{2EJ} \int_0^{l/2} \left(\frac{P}{2} - \frac{C}{l} \right)^2 x^2 dx =$$

$$\frac{1}{2EJ} \int_0^{l/2} \left(\frac{P^2}{4} + \frac{C^2}{l^2} - 2 \frac{PC}{2l} \right) x^2 dx = \frac{1}{2EJ} \left(\frac{P^2}{4} + \frac{C^2}{l^2} - 2 \frac{PC}{2l} \right) \frac{l^3}{3 \times 8} =$$

$$\frac{1}{2EJ} \left(\frac{P^2}{4} + \frac{C^2}{l^2} - 2 \frac{PC}{2l} \right) \frac{l^3}{24}$$

Tratto 2:

$$M_{f,2}(x) = \left(\frac{P}{2} + \frac{C}{l} \right) x - C$$

$$U_2 = \int_0^{l/2} \frac{M_{f,2}^2}{2EJ} dx =$$

$$\frac{1}{2EJ} \int_0^{l/2} \left[\left(\frac{P}{2} + \frac{C}{l} \right) x - C \right]^2 dx = \frac{1}{2EJ} \int_0^{l/2} \left[\left(\frac{P}{2} + \frac{C}{l} \right)^2 x^2 + C^2 - 2 \left(\frac{P}{2} + \frac{C}{l} \right) x C \right] dx =$$

$$\frac{1}{2EJ} \left[\left(\frac{P^2}{4} + \frac{C^2}{l^2} + 2 \frac{PC}{2l} \right) \frac{l^3}{3 \times 8} + C^2 \frac{l}{2} - 2 \left(\frac{P}{2} + \frac{C}{l} \right) C \frac{l^2}{2 \times 4} \right]$$

L'energia interna totale U vale

$$U = U_1 + U_2 = \frac{1}{2EJ} \left(\frac{P^2}{4} + \frac{C^2}{l^2} - 2 \frac{PC}{2l} \right) \frac{l^3}{24} + \frac{1}{2EJ} \left[\left(\frac{P^2}{4} + \frac{C^2}{l^2} + 2 \frac{PC}{2l} \right) \frac{l^3}{3 \times 8} + C^2 \frac{l}{2} - 2 \left(\frac{P}{2} + \frac{C}{l} \right) C \frac{l^2}{2 \times 4} \right]$$

La rotazione φ_B nel punto B si ottiene differenziando l'energia interna U rispetto alla coppia fittizia C , ed infine ponendo nulla la coppia fittizia, $C=0$.

$$\varphi_B = \left. \frac{\partial U}{\partial C} \right|_{C=0} =$$

$$\frac{1}{2EJ} \left(\frac{2C}{l^2} - 2 \frac{P}{2l} \right) \frac{l^3}{24} + \frac{1}{2EJ} \left\{ \left(\frac{2C}{l^2} + 2 \frac{P}{2l} \right) \frac{l^3}{3 \times 8} + 2C \frac{l}{2} + \left[-2 \left(\frac{1}{l} \right) C - 2 \left(\frac{P}{2} + \frac{C}{l} \right) \right] \frac{l^2}{2 \times 4} \right\} \Bigg|_{C=0} =$$

$$\frac{1}{2EJ} \left(-2 \frac{P}{2l} \right) \frac{l^3}{24} + \frac{1}{2EJ} \left\{ \left(2 \frac{P}{2l} \right) \frac{l^3}{3 \times 8} + \left[-2 \left(\frac{P}{2} \right) \right] \frac{l^2}{2 \times 4} \right\} =$$

$$\frac{1}{2EJ} \left(-\frac{Pl^2}{24} + \frac{Pl^2}{24} - \frac{Pl^2}{8} \right) = -\frac{3Pl^2}{48EJ} = -\frac{Pl^2}{16EJ}$$

Il valore negativo della rotazione φ_B indica che la rotazione avviene in verso opposto a quello di C .

I calcoli precedenti possono venire sveltiti adottando la seguente strategia alternativa. Si applicano due uguali coppie fittizie C alle due estremità della trave, come mostrato in Figura (d). Così facendo, diversamente dalla Figura

(b), si conserva la simmetria del problema, per cui i momenti flettenti e le energie interne sono uguali nei due tratti (1) e (2). Per ottenere l'energia interna totale, basta quindi raddoppiare l'energia interna calcolata per un tratto. Si considera nel seguito il tratto (1) di Figura (d). Il momento flettente $M_{f,1}$ e l'energia interna U_1 valgono:

$$M_{f,1}(x) = \frac{P}{2}x - C$$

$$U_1 = \int_0^{l/2} \frac{M_{f,1}^2}{2EJ} dx = \int_0^{l/2} \frac{\left(\frac{P}{2}x - C\right)^2}{2EJ} dx = \frac{1}{2EJ} \int_0^{l/2} \left(\frac{P^2}{4}x^2 + C^2 - 2\frac{P}{2}Cx\right) dx =$$

$$\frac{1}{2EJ} \left(\frac{P^2}{4} \frac{l^3}{3 \times 8} + C^2 \frac{l}{2} - PC \frac{l^2}{2 \times 4}\right)$$

L'energia interna totale U vale:

$$U = 2U_1 = \frac{1}{EJ} \left(\frac{P^2}{4} \frac{l^3}{3 \times 8} + C^2 \frac{l}{2} - PC \frac{l^2}{2 \times 4}\right)$$

Si noti che la coppia fittizia C è stata applicata due volte in Figura (d). Quindi, derivando l'energia interna U rispetto a C , si ottiene la somma delle rotazioni ai due estremi della trave, positive se equiverse con C . Siccome, per la simmetria del problema, tali rotazioni sono uguali, derivando U rispetto a C si ottiene il doppio della rotazione ad ogni singola estremità della trave.

$$2\varphi_B = \frac{\partial U}{\partial C} \Big|_{C=0} = \frac{1}{EJ} \left(2C \frac{l}{2} - P \frac{l^2}{2 \times 4}\right) \Big|_{C=0} = -\frac{Pl^2}{8EJ}$$

Quindi

$$\varphi_B = -\frac{Pl^2}{16EJ}$$

1.10 Si considera la trave di Figura 1.10, di lunghezza l , incastrata ad una estremità, e soggetta ad un carico distribuito costante p , Figura (a). Si vuole calcolare la freccia e la rotazione della trave all'estremità libera A.

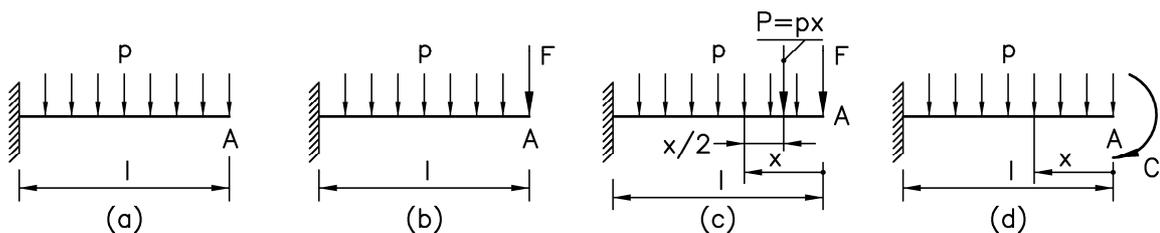


Figura 1.10

Relativamente al calcolo della freccia in A , si ricorda che Castigliano richiede la presenza di una forza concentrata nel punto in cui si vuole calcolare la freccia. Siccome nel caricamento originale della trave, rappresentato in Figura (a), non è prevista una forza concentrata in A , occorre applicare in A una forza fittizia F , Figura (b). Solo al termine delle calcolazioni, e cioè dopo aver derivato l'energia interna U rispetto ad F , si esprimerà il fatto che F non esiste, ponendo $F=0$. Il momento flettente valutato nella sezione generica x e dovuto alla sola pressione p si calcola moltiplicando la risultante della pressione agente lungo il tratto tra 0 ed x , che vale px , per il braccio di tale risultante rispetto alla sezione definita dalla coordinata x , che vale $x/2$, Figura (c). Inoltre, il momento flettente valutato nella sezione generica x e dovuto alla sola forza concentrata F vale Fx . Il momento flettente totale M_f dovuto alla contemporanea presenza della pressione p e della forza F è la somma (e non la differenza) dei due contributi precedenti, dato che i due contributi, considerati separatamente, inflettono la trave nello stesso modo, producono cioè entrambi trazione delle fibre superiori della trave. Il momento flettente totale M_f , l'energia interna U , la derivata di U rispetto ad F valutata per $F=0$, la quale esprime la freccia in A , f_A , valgono quindi

$$M_f(x) = px \frac{x}{2} + Fx = p \frac{x^2}{2} + Fx$$

$$U = \int_0^l \frac{M_f^2}{2EJ} dx = \int_0^l \frac{\left(p \frac{x^2}{2} + Fx \right)^2}{2EJ} dx = \frac{1}{2EJ} \int_0^l \left(p^2 \frac{x^4}{4} + F^2 x^2 + 2p \frac{x^2}{2} Fx \right) dx =$$

$$\frac{1}{2EJ} \int_0^l \left(p^2 \frac{x^4}{4} + F^2 x^2 + pFx^3 \right) dx = \frac{1}{2EJ} \left(p^2 \frac{l^5}{4 \times 5} + F^2 \frac{l^3}{3} + pF \frac{l^4}{4} \right)$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial F} \right|_{F=0} = f_A = \frac{1}{2EJ} \left(2F \frac{l^3}{3} + p \frac{l^4}{4} \right) \Big|_{F=0} = \frac{pl^4}{8EJ}$$

Passando al calcolo della rotazione in A , occorre applicare in A una coppia fittizia C , Figura (d). Solo al termine delle calcolazioni, e cioè dopo aver derivato l'energia interna U rispetto a C , si esprimerà il fatto che C è una coppia fittizia, ponendo $C=0$.

Il momento flettente totale M_f dovuto alla contemporanea presenza della pressione p e della coppia C è la somma (e non la differenza) dei due contributi considerati separatamente, dato che i due contributi inflettono la trave nello stesso modo, producendo entrambi trazione delle fibre superiori della trave. Il momento flettente totale M_f , l'energia interna U , la derivata di U rispetto a C valutata per $C=0$, la quale esprime la rotazione in A , φ_A , valgono

$$M_f(x) = px \frac{x}{2} + C = p \frac{x^2}{2} + C$$

$$U = \int_0^l \frac{M_f^2}{2EJ} dx = \int_0^l \frac{\left(p \frac{x^2}{2} + C\right)^2}{2EJ} dx = \frac{1}{2EJ} \int_0^l \left(p^2 \frac{x^4}{4} + C^2 + 2p \frac{x^2}{2} C\right) dx =$$

$$\frac{1}{2EJ} \int_0^l \left(p^2 \frac{x^4}{4} + C^2 + pCx^2\right) dx = \frac{1}{2EJ} \left(p^2 \frac{l^5}{4 \times 5} + C^2 l + pC \frac{l^3}{3}\right)$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial C} \right|_{C=0} = \varphi_A = \left. \frac{1}{2EJ} \left(2Cl + p \frac{l^3}{3}\right) \right|_{F=0} = \frac{pl^3}{6EJ}$$

1.11 Si considera la trave di Figura 1.11, di lunghezza l , incastrata ad una estremità, e soggetta ad una pressione p , distribuita con legge triangolare, nulla nel punto A e con valore massimo p_0 della pressione raggiunto nella sezione di incastro, Figura (a). Si vuole calcolare la freccia e la rotazione della trave in A .

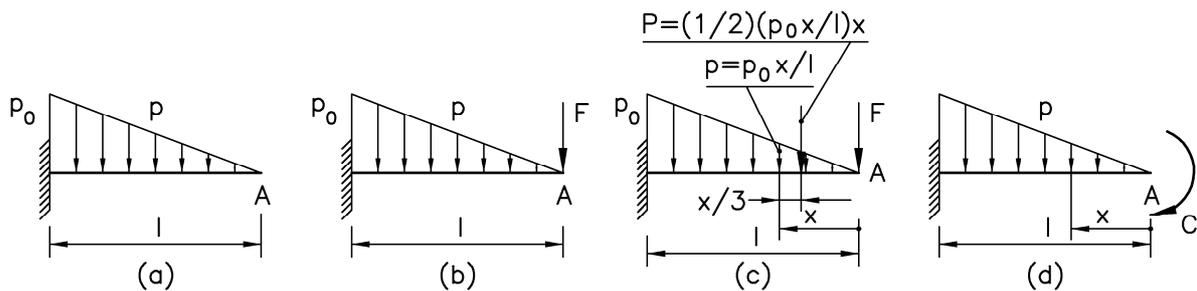


Figura 1.11

Relativamente al calcolo della freccia in A , Castigliano richiede la presenza di una forza concentrata nel punto in cui si vuole calcolare la freccia. Occorre quindi applicare in A una forza fittizia F , Figura (b). Solo al termine delle calcolazioni, e cioè dopo aver derivato l'energia interna U rispetto ad F , si esprimerà il fatto che F è fittizio, ponendo $F=0$. Il momento flettente valutato nella sezione generica x e dovuto alla sola distribuzione di pressione triangolare p si calcola moltiplicando la risultante della pressione agente lungo il tratto tra 0 ed x per il braccio di tale risultante rispetto alla sezione definita dalla coordinata x . La risultante della pressione tra 0 ed x si calcola osservando che il valore della pressione in corrispondenza della sezione della trave definita dalla coordinata generica x vale p_0x/l , Figura (c). (Come riprova della correttezza di tale formula, per $x=l$ la pressione vale correttamente p_0 , mentre per $x=0$ la pressione è nulla.) Siccome la pressione è distribuita con legge triangolare, la risultante della pressione tra 0 ed x eguaglia l'area della sezione triangolare, di

altezza p_0x/l e di base x . La risultante P , Figura (c), vale quindi $(1/2)(p_0x/l)x=(1/2)p_0x^2/l$. Il momento flettente relativo ad una sezione generica x e dovuto a p vale infine il prodotto della risultante P per il braccio della risultante rispetto alla sezione generica definita da x , che vale $x/3$, Figura (c). In conclusione, il momento flettente dovuto a p e valutato in una sezione generica definita dalla coordinata x vale $=(1/2)p_0x^3/(3l)=p_0x^3/(6l)$. Inoltre, il momento flettente valutato nella sezione generica x e dovuto alla sola forza concentrata F vale Fx . Il momento flettente totale M_f dovuto alla contemporanea presenza della pressione triangolare p e della forza F è la somma dei due contributi considerati separatamente, dato che i due contributi inflettono la trave nello stesso modo, producendo entrambi trazione delle fibre superiori della trave. Il momento flettente totale M_f , l'energia interna U , la derivata di U rispetto a F valutata per $F=0$, la quale esprime la freccia in A, f_A , valgono

$$M_f(x) = p_0 \frac{x^3}{6l} + Fx$$

$$U = \int_0^l \frac{M_f^2}{2EJ} dx = \int_0^l \frac{\left(p_0 \frac{x^3}{6l} + Fx\right)^2}{2EJ} dx = \frac{1}{2EJ} \int_0^l \left(p_0^2 \frac{x^6}{36l^2} + F^2 x^2 + 2p_0 \frac{x^3}{6l} Fx\right) dx =$$

$$\frac{1}{2EJ} \int_0^l \left(\frac{p_0^2}{36l^2} x^6 + F^2 x^2 + \frac{p_0 F}{3l} x^4\right) dx = \frac{1}{2EJ} \left(\frac{p_0^2 l^7}{36 \times 7l^2} + F^2 \frac{l^3}{3} + \frac{p_0 F}{3l} \frac{l^5}{5}\right)$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial F} \right|_{F=0} = f_A = \frac{1}{2EJ} \left(2F \frac{l^3}{3} + \frac{p_0}{3l} \frac{l^5}{5}\right) \Big|_{F=0} = \frac{p_0 l^4}{30EJ}$$

Passando al calcolo della rotazione in A, occorre applicare in A una coppia fittizia C , Figura (d). Solo al termine delle calcolazioni, e cioè dopo aver derivato l'energia interna U rispetto a C , si esprimerà il fatto che C è fittizia, ponendo $C=0$. Il momento flettente totale M_f , l'energia interna U , la derivata di U rispetto a C valutata per $C=0$, la quale esprime la rotazione in A, φ_A , valgono

$$M_f(x) = p_0 \frac{x^3}{6l} + C$$

$$U = \int_0^l \frac{M_f^2}{2EJ} dx = \int_0^l \frac{\left(p_0 \frac{x^3}{6l} + C\right)^2}{2EJ} dx = \frac{1}{2EJ} \int_0^l \left(p_0^2 \frac{x^6}{36l^2} + C^2 + 2p_0 \frac{x^3}{6l} C\right) dx =$$

$$\frac{1}{2EJ} \int_0^l \left(\frac{p_0^2}{36l^2} x^6 + C^2 + \frac{p_0 C}{3l} x^3\right) dx = \frac{1}{2EJ} \left(\frac{p_0^2 l^7}{36 \times 7l^2} + C^2 l + \frac{p_0 C}{3l} \frac{l^4}{4}\right)$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial C} \right|_{C=0} = \varphi_A = \frac{1}{2EJ} \left(2Cl + \frac{p_0}{3} \frac{l^3}{4}\right) \Big|_{C=0} = \frac{p_0 l^3}{24EJ}$$

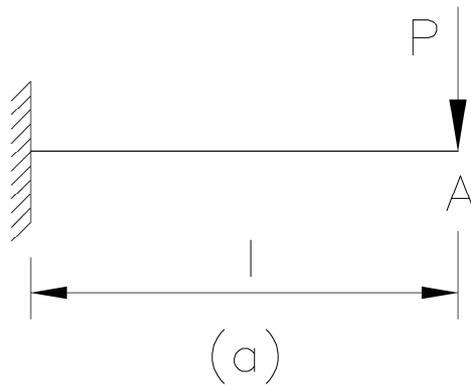


Figura 1.12

1.12 Si considera la trave di Figura 1.12, di lunghezza l , incastrata ad una estremità, e soggetta ad una forza trasversale concentrata P all'altra estremità, punto A, Figura (a). Si vuole calcolare la freccia della trave in A impiegando un modello flessotagliante (e non un modello puramente flessionale), per esaminare l'influenza del Taglio sulle deformazioni della trave.

Per una generica coordinata x , il Momento Flettente M_f ed il taglio T valgono

$$M_f(x) = Px \quad ; \quad T = P$$

L'energia interna U che tiene conto del Momento Flettente e del Taglio, e la freccia f_A valgono:

$$U = \int_0^l \frac{M_f^2}{2EJ} dx + \int_0^l \xi \frac{T^2}{2AG} dx = \int_0^l \frac{P^2 x^2}{2EJ} dx + \int_0^l \xi \frac{P^2}{2AG} dx = \frac{P^2 l^3}{2 \times 3EJ} + \xi \frac{P^2 l}{2AG}$$

$$f_A = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{Pl^3}{3EJ} + \xi \frac{Pl}{AG}$$

dove ξ è il fattore di Taglio, che per sezioni rettangolari vale 1.2 e per sezioni circolari piene vale 1.11 . (Non si deve confondere ξ col coefficiente che fa passare dalla tensione tangenziale media alla massima, che vale 3/2 per sezioni rettangolari, e 4/3 per sezioni circolari piene.)

Per quantificare l'influenza del Taglio sulle frecce, si considera un esempio numerico, riferito ad una lunghezza della trave $l=100$ mm, sezione trasversale rettangolare della trave, con $b=10$ mm e $h=20$ mm. Quindi l'area trasversale della trave $A=200$ mm², e $J=bh^3/12=10 \times 20^3/12=6666.66$ mm⁴. Inoltre $E=210000$ MPa, e $G \cong 80000$ MPa. Infine, $P=10000$ N.

La freccia vale $2.3810+0.075=2.456$ mm. La parte tagliante della freccia è quindi (in questo esempio) soltanto $0.075/2.456=3.05$ per cento della freccia complessiva. Questo risultato giustifica l'impiego di modelli puramente flessionali nella pratica ingegneristica,

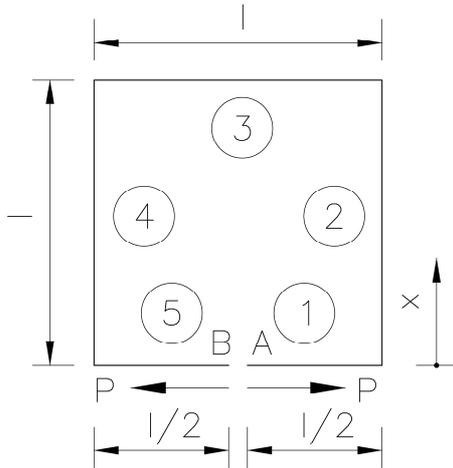


Figura 1.13

1.13 Si considera l'anello quadrato aperto di Figura 1.13, dove la trave inferiore è tagliata a metà, e le due forze P sono applicate ai due monconi A e B (per chiarezza grafica, le forze P sono state rappresentate lievemente disassate rispetto all'asse della trave; in realtà tale disassamento non esiste). Si vuole calcolare l'apertura dell'anello, dovuta alle due forze P .

Il momento flettente è nullo nei tratti (1) e (5). Il momento flettente nei tratti (2) e (3) vale

$$M_{f,2}(x) = Px \quad ; \quad M_{f,3}(x) = Pl$$

L'energia interna dei due tratti (2) e (3) e l'energia totale U dell'anello valgono

$$U_2 = \int_0^l \frac{M_{f,2}^2}{2EJ} dx = \int_0^l \frac{P^2 x^2}{2EJ} dx = \frac{P^2 l^3}{2 \times 3EJ} \quad ; \quad U_3 = \int_0^l \frac{M_{f,3}^2}{2EJ} dx = \int_0^l \frac{P^2 l^2}{2EJ} dx = \frac{P^2 l^3}{2EJ}$$

$$U = 2U_2 + U_3 = 2 \frac{P^2 l^3}{2 \times 3EJ} + \frac{P^2 l^3}{2EJ} = \frac{5P^2 l^3}{6EJ}$$

L'apertura dell'anello quadrato f , cioè l'allontanamento del punto A da B , si ottiene derivando l'energia interna U rispetto a P . Infatti tale derivata rappresenta la somma di due frecce, rispetto alle quali le due forze P , applicate in A e B , lavorano. Tale somma di frecce è appunto l'apertura f dell'anello.

$$f = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{5Pl^3}{3EJ}$$

Si osserva infine che l'anello di Figura 1.13 è una struttura labile, dato che sono permesse rototraslazioni rigide, indefinite. In genere, non si possono definire univocamente gli spostamenti in una struttura labile, dato che gli spostamenti sono indefiniti a causa del moto rototraslatorio rigido, indefinito. In questo esempio, tuttavia, si considera lo spostamento di una estremità dell'anello aperto, rispetto all'altra estremità, ed appare fisicamente chiaro che tale spostamento relativo è univocamente definito.

Calcoli simili a questi vengono impiegati per trovare le tensioni in un anello di tenuta del pistone (è un anello circolare tagliato) durante il montaggio.

1.14 Si considera l'anello aperto di Figura 1.14, dove le due forze P sono applicate ai due estremi A e B . Si vuole calcolare l'apertura dell'anello dovuta alle due forze P .

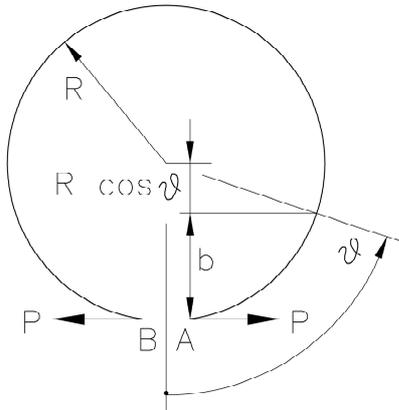


Figura 1.14

Il braccio b della forza P rispetto al baricentro di una sezione generica individuata dalla coordinata angolare ϑ va misurato in direzione perpendicolare alla retta d'azione della forza P , e vale

$$b = R(1 - \cos \vartheta)$$

Il momento flettente M_f in funzione della coordinata angolare ϑ vale

$$M_f(\vartheta) = Pb = PR(1 - \cos \vartheta)$$

L'energia interna U dell'anello vale

$$U = \int_0^{2\pi} \frac{M_f^2}{2EJ} R d\vartheta = \int_0^{2\pi} \frac{P^2 R^2 (1 - \cos \vartheta)^2}{2EJ} R d\vartheta = \frac{P^2 R^3}{2EJ} \int_0^{2\pi} (1 - \cos \vartheta)^2 d\vartheta = \frac{3\pi P^2 R^3}{2EJ}$$

L'apertura f dell'anello, cioè l'allontanamento del punto A da B , si ottiene derivando l'energia interna U rispetto a P . Infatti tale derivata rappresenta la somma di due frecce, rispetto alle quali le due forze P , applicate in A e B , lavorano. Tale somma di frecce è appunto l'apertura f dell'anello.

$$f = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{3\pi P R^3}{EJ}$$

Calcoli simili a questi vengono impiegati per determinare le tensioni durante il montaggio di un anello di tenuta del pistone (è un anello tagliato) e per prevedere così indesiderate plasticizzazioni.

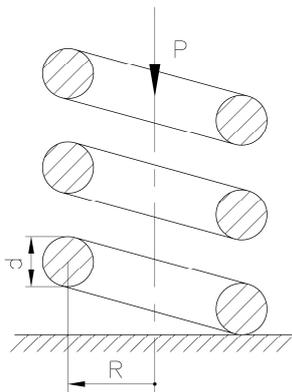


Figura 1.15

1.15 Si considera la molla ad elica cilindrica di compressione realizzata in acciaio, Figura 1.15, compressa dalla forza P e definita nella sua geometria dal raggio medio R , dal diametro del filo d e dal numero di spire n . Si vuole calcolare la freccia f della molla. La molla lavora prevalentemente a momento torcente M_t , di valore costante lungo le spire

$$M_t \approx PR$$

Considerando la molla come formata da n anelli sovrapposti, l'energia interna U della molla vale

$$U = n \int_0^{2\pi} \frac{M_t^2}{2GJ_p} R d\vartheta = n \int_0^{2\pi} \frac{P^2 R^2}{2GJ_p} R d\vartheta = n \frac{P^2 R^3}{2G \frac{\pi d^4}{32}} \int_0^{2\pi} d\vartheta = \frac{P^2 R^3 n}{2G \frac{\pi d^4}{32}} 2\pi = \frac{32 P^2 R^3 n}{G d^4}$$

La freccia f della molla si ottiene derivando l'energia interna U rispetto a P :

$$f = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{64PR^3n}{Gd^4}$$

Questo risultato coincide con la formula ottenuta con metodi classici nei corsi di Costruzione di Macchine.

1.16 Si considera la trave di Figura 1.16 (a), di lunghezza l , incastrata ad una estremità, ed inflessa all'altra estremità da una forza concentrata trasversale P . Si vuole determinare la freccia della trave per un punto generico, definito dalla coordinata y della Figura (b).

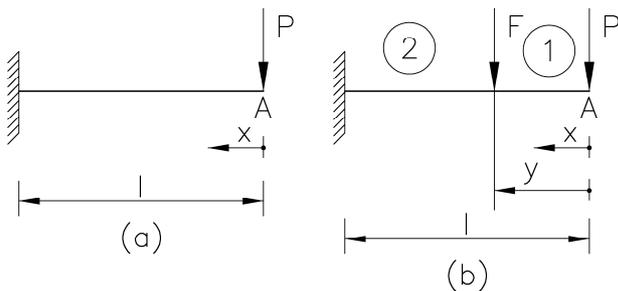


Figura 1.16

Per determinare la freccia in un punto qualunque, occorre introdurre la forza concentrata

trasversale F in un punto generico definito dalla coordinata y . Occorre calcolare il momento flettente $M_f(x)$ e l'energia interna U per i due tratti (1) e (2). Per entrambi i tratti, conviene calcolare M_f in funzione di x , lasciando ad y il compito di determinare la posizione generica di F . Per il tratto (1) si ha

$$M_{f,1} = Px \quad ; \quad U_1 = \int_0^y \frac{M_{f,1}^2}{2EJ} dx = \frac{1}{2EJ} \int_0^y P^2 x^2 dx = \frac{P^2}{2EJ} \frac{y^3}{3}$$

Per il tratto (2) si ha

$$M_{f,2} = Px + F(x - y)$$

$$U_2 = \int_y^l \frac{M_{f,2}^2}{2EJ} dx = \frac{1}{2EJ} \int_y^l [Px + F(x - y)]^2 dx = \frac{1}{2EJ} \int_y^l [P^2 x^2 + F^2(x^2 + y^2 - 2xy) + 2PF(x^2 - xy)] dx =$$

$$\frac{1}{2EJ} \int_y^l [(P + F)^2 x^2 + F^2 y^2 - 2(F^2 + PF)xy] dx =$$

$$\frac{1}{2EJ} \left[(P + F)^2 \frac{1}{3} (l^3 - y^3) + F^2 y^2 (l - y) - 2(F^2 + PF)y \frac{1}{2} (l^2 - y^2) \right]$$

La freccia f nella sezione generica y vale la derivata dell'energia interna totale $U=U_1+U_2$ rispetto ad F , valutata per $F=0$.

$$f(y) = \left. \frac{\partial U_1}{\partial F} \right|_{F=0} + \left. \frac{\partial U_2}{\partial F} \right|_{F=0} = 0 + \frac{1}{2EJ} \left[2(P+F) \frac{1}{3} (l^3 - y^3) + 2Fy^2(l-y) - 2(2F+P)y \frac{1}{2} (l^2 - y^2) \right]_{F=0} =$$

$$\frac{1}{2EJ} \left(\frac{2}{3} P(l^3 - y^3) - Py(l^2 - y^2) \right) = \frac{P}{2EJ} \left(\frac{2}{3} (l^3 - y^3) - y(l^2 - y^2) \right) = \frac{P}{EJ} \left(\frac{y^3}{6} - \frac{l^2 y}{2} + \frac{l^3}{3} \right)$$

Lo stesso risultato si ottiene partendo dall'equazione differenziale della linea elastica, scritta con i simboli consueti

$$\eta'' = \frac{M_f}{EJ}$$

dove η'' indica la derivata seconda della freccia, e cioè coincide col simbolo f'' . Sostituendo l'espressione

$$M_f = Px$$

si ottiene l'espressione differenziale

$$\eta'' = \frac{Px}{EJ}$$

Integrando una prima volta, si ottiene

$$\eta' = \frac{Px^2}{2EJ} + C_1$$

Integrando una seconda volta, si ottiene

$$\eta = \frac{Px^3}{6EJ} + C_1 x + C_2$$

Le due costanti di integrazione C_1 e C_2 si determinano imponendo che la freccia η e la sua derivata prima η' si annullino per $x=l$. Si ottiene

$$\eta'(l) = 0 \Rightarrow \frac{Pl^2}{2EJ} + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{Pl^2}{2EJ}$$

$$\eta(l) = 0 \Rightarrow \frac{Pl^3}{6EJ} + C_1 l + C_2 = 0 \Rightarrow \frac{Pl^3}{6EJ} - \frac{Pl^2}{2EJ} l + C_2 = 0 \Rightarrow \frac{Pl^3}{6EJ} - \frac{Pl^3}{2EJ} + C_2 = 0 \Rightarrow$$

$$C_2 = \frac{Pl^3}{2EJ} - \frac{Pl^3}{6EJ} = \frac{Pl^3}{3EJ}$$

Introducendo i valori di C_1 e C_2 , la freccia η diventa

$$\eta = \frac{Px^3}{6EJ} - \frac{Pl^2}{2EJ} x + \frac{Pl^3}{3EJ} = \frac{P}{EJ} \left(\frac{x^3}{6} - \frac{l^2 x}{2} + \frac{l^3}{3} \right)$$

dove tale espressione coincide con quella precedentemente calcolata alla Castigliano.

2 Esempi di soluzioni di travi iperstatiche tramite Castigliano

2.1 Si considera la trave di Figura 2.1, di lunghezza l , incastrata ad una estremità, appoggiata all'altra estremità, e soggetta ad una forza trasversale concentrata P applicata al centro della trave, Figura (a). Si vuole calcolare il momento flettente lungo la trave.

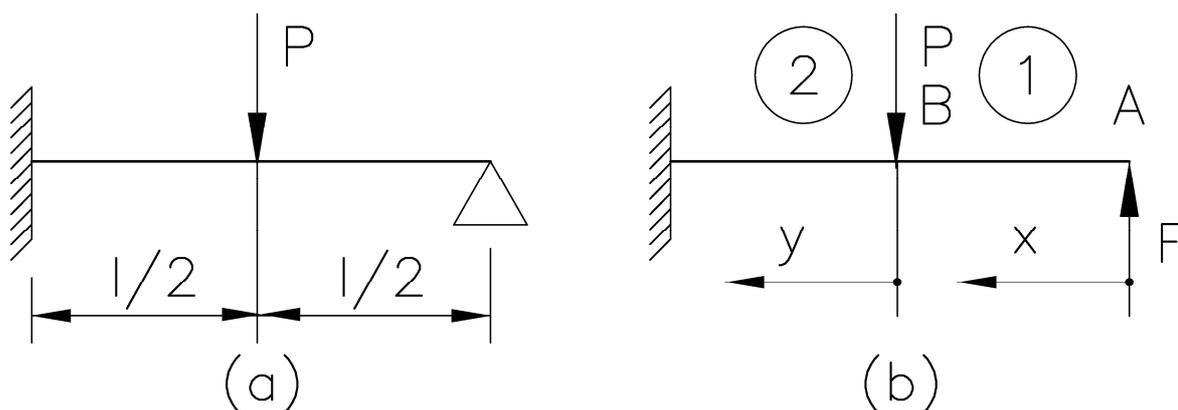


Figura 2.1

Si osserva che tale problema è una volta iperstatico, dato che le equazioni di equilibrio non sono sufficienti a calcolare completamente le reazioni vincolari. In particolare, se si svincola la trave rimuovendo l'appoggio di destra, non si riesce a calcolare la reazione F (assunta verticale) tramite le sole equazioni di equilibrio, Figura (b). (Lo svincolamento non è univoco; altri svincolamenti sono in genere possibili, ma spesso uno svincolamento risulta più naturale e vantaggioso di altri.) Occorre quindi imporre un'equazione di congruenza (deformabilità), che esprime la condizione che, sotto l'effetto simultaneo delle forze P ed F , l'estremo A non si deve muovere verticalmente, simulando così il vincolo di cerniera in A che è stato rimosso. (Si noti che la cerniera non impone restrizioni sulla rotazione della trave in A , per cui non si deve imporre che la rotazione sia nulla in A . Questa imposizione sarebbe necessaria se la trave fosse incastrata in A .)

Il calcolo della freccia in A può venire effettuato con Castigliano. Una volta determinata la forza F , il momento flettente può venire valutato lungo la trave. In questo esercizio ci si limita a risolvere l'iperstatica, mentre la valutazione dettagliata del momento flettente viene lasciata allo studente. Questo esempio mostra quanto sia più laborioso calcolare il momento flettente in una trave iperstatica rispetto ad una trave isostatica.

Per calcolare la freccia in A , conviene dividere idealmente la trave nei tratti (1) e (2), descritti rispettivamente dalle coordinate x ed y , Figura (b). Relativamente al tratto (1), il momento flettente e l'energia interna valgono

$$M_{f,1}(x) = Fx \quad U_1 = \int_0^{l/2} \frac{M_{f,1}^2}{2EJ} dx = \int_0^{l/2} \frac{F^2 x^2}{2EJ} dx = \frac{F^2}{2EJ} \frac{l^3}{3 \times 8}$$

Relativamente al tratto (2), il momento flettente e l'energia interna valgono

$$M_{f,2}(y) = F\left(y + \frac{l}{2}\right) - Py \quad U_2 = \int_0^{l/2} \frac{M_{f,2}^2}{2EJ} dx = \frac{1}{2EJ} \int_0^{l/2} \left[F\left(y + \frac{l}{2}\right) - Py \right]^2 dx =$$

$$\frac{1}{2EJ} \int_0^{l/2} \left[F^2 \left(y^2 + \frac{l^2}{4} + 2y \frac{l}{2} \right) + P^2 y^2 - 2PF \left(y^2 + y \frac{l}{2} \right) \right] dx =$$

$$\frac{1}{2EJ} \left[F^2 \left(\frac{l^3}{3 \times 8} + \frac{l^2}{4} \frac{l}{2} + 2 \frac{l}{2} \frac{l^2}{2 \times 4} \right) + P^2 \frac{l^3}{3 \times 8} - 2PF \left(\frac{l^3}{3 \times 8} + \frac{l}{2} \frac{l^2}{2 \times 4} \right) \right]$$

L'energia interna totale U vale

$$U = U_1 + U_2 = \frac{F^2}{2EJ} \frac{l^3}{3 \times 8} + \frac{1}{2EJ} \left[F^2 \left(\frac{l^3}{3 \times 8} + \frac{l^2}{4} \frac{l}{2} + 2 \frac{l}{2} \frac{l^2}{2 \times 4} \right) + P^2 \frac{l^3}{3 \times 8} - 2PF \left(\frac{l^3}{3 \times 8} + \frac{l}{2} \frac{l^2}{2 \times 4} \right) \right]$$

La freccia in A viene calcolata derivando U rispetto ad F . Ponendo nulla tale freccia, si individua il legame tra P ed F . Si riesce cioè ad esprimere la reazione incognita F in funzione del carico noto imposto P . Nel nostro caso

$$f_A = \frac{\partial U}{\partial F} = \frac{2F}{2EJ} \frac{l^3}{3 \times 8} + \frac{1}{2EJ} \left[2F \left(\frac{l^3}{3 \times 8} + \frac{l^2}{4} \frac{l}{2} + 2 \frac{l}{2} \frac{l^2}{2 \times 4} \right) - 2P \left(\frac{l^3}{3 \times 8} + \frac{l}{2} \frac{l^2}{2 \times 4} \right) \right] =$$

$$\frac{1}{2EJ} \left[\frac{2Fl^3}{3} - \frac{5Pl^3}{24} \right] = 0 \quad \Rightarrow \quad F = \frac{5P}{16}$$

Il fatto che F risulti positivo implica che in Figura (b) era stato indovinato il verso corretto di F (cioè opposto al verso di P).

Una volta risolta l'iperstatica, si può calcolare il momento flettente, ed anche calcolare la freccia in un punto qualunque. Se per esempio si vuole calcolare la freccia in B , Figura (b), si può derivare rispetto a P , applicato in B , l'energia interna calcolata per $F=5P/16$. Si osserva però che P compare due volte nel caricamento della trave, una volta per descrivere la forza applicata in B , ed una seconda volta per quantificare F applicata in A , secondo la formula $F=5P/16$. Quindi, quando si deriva U rispetto a P , si ottiene la somma di due frecce, collegate alle due precedenti forze espresse in termini di P . Sappiamo tuttavia che la freccia in A è nulla se $F=5P/16$. Quindi, derivando U rispetto a P , si ottiene soltanto la freccia in B .

2.2 Si considera la trave di Figura 2.2, di lunghezza l , incastrata alle due estremità, e soggetta ad una forza trasversale concentrata P applicata al centro della trave, Figura (a). Si vuole calcolare il momento flettente lungo la trave.

Ci si limita in questo esempio a risolvere l'iperstatica. Lo svincolamento di Figura (b) è particolarmente vantaggioso perché conserva la simmetria del

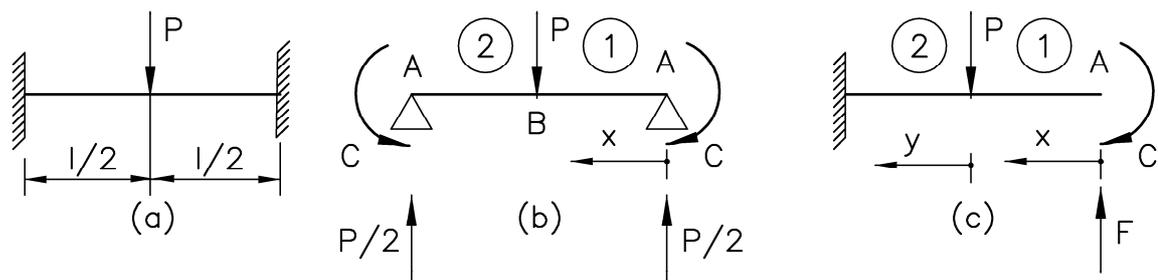


Figura 2.2

problema. La reazione verticale agli appoggi vale, dalle condizioni di equilibrio verticale, $P/2$, e quindi non è un'incognita iperstatica. Invece, la coppia C è l'unica incognita iperstatica. (Reazioni orizzontali vengono come al solito escluse.)

Lo svincolamento alternativo di Figura (c) consiste nel rimuovere l'incastro di destra e nel sostituirlo con una forza incognita F ed una coppia incognita C applicate alla estremità A della trave, le quali, se di intensità corretta, precludono la freccia e rotazione in A , ripristinando quindi l'effetto dell'incastro in A , che è stato rimosso nello svincolamento. Lo svincolamento alternativo di Figura (c) non preserva la simmetria del problema, e sembra quindi meno favorevole, dato che, almeno a prima vista, le incognite da calcolare sono due, F e C . Si riconsidererà lo svincolamento di Figura (c) più avanti.

Ritornando allo svincolamento (b), occorre determinare il valore della coppia C tale che le estremità A della trave (b) non ruotino, in accordo con le costrizioni imposte dal vincolo di incastro.

Siccome il problema è simmetrico, si studia solo metà struttura, per esempio il tratto (1) della Figura (b). Il momento flettente per il tratto (1) della struttura e l'energia interna valgono

$$M_{f,1}(x) = \frac{P}{2}x - C$$

$$U_1 = \int_0^{l/2} \frac{M_f^2}{2EJ} dx = \int_0^{l/2} \frac{\left(\frac{P}{2}x - C\right)^2}{2EJ} dx = \frac{1}{2EJ} \int_0^{l/2} \left(\frac{P^2}{4}x^2 + C^2 - 2\frac{P}{2}xC\right) dx =$$

$$\frac{1}{2EJ} \left(\frac{P^2}{4} \frac{l^3}{3 \times 8} + C^2 \frac{l}{2} - PC \frac{l^2}{2 \times 4} \right)$$

L'energia interna totale U e la sua derivata rispetto a C valgono

$$U = 2U_1 = \frac{2}{2EJ} \left(\frac{P^2}{4} \frac{l^3}{3 \times 8} + C^2 \frac{l}{2} - PC \frac{l^2}{2 \times 4} \right)$$

$$\frac{\partial U}{\partial C} = 2\varphi_A = \frac{2}{2EJ} \left(2C \frac{l}{2} - P \frac{l^2}{2 \times 4} \right)$$

Si noti che, siccome C compare ai due estremi della trave, la derivate dell'energia interna totale U rispetto a C è la somma delle due rotazioni φ_A , tra loro uguali, in A . Ponendo $\varphi_A=0$ (oppure $2\varphi_A=0$), si ottiene l'espressione di C in termini di P che non provoca rotazioni alle estremità della trave.

$$2\varphi_A = \frac{2}{2EJ} \left(2C \frac{l}{2} - P \frac{l^2}{2 \times 4} \right) = 0 \Rightarrow C = \frac{Pl}{8}$$

Si è così risolta l'iperstatica. Se si vuole calcolare la freccia in B , occorre calcolare l'energia interna totale tenendo conto che $C=Pl/8$. Si ottiene:

$$U = 2U_1 = \frac{2}{2EJ} \left(\frac{P^2}{4} \frac{l^3}{3 \times 8} + \frac{P^2 l^2}{64} \frac{l}{2} - P \frac{Pl}{8} \frac{l^2}{2 \times 4} \right) = \frac{P^2 l^3}{EJ} \left(\frac{1}{96} + \frac{1}{128} - \frac{1}{64} \right) = \frac{1}{384} \frac{P^2 l^3}{EJ}$$

$$\frac{\partial U}{\partial P} = f_B = \frac{1}{192} \frac{Pl^3}{EJ}$$

Si noti che P compare tre volte nel caricamento della struttura, e cioè relativamente alle forze applicate ai due punti A ed al punto B . Derivando l'energia interna, si trova quindi la somma di tre frecce. Si osserva però che la freccia della trave è nulla nei due punti A . Di conseguenza, quando si deriva l'energia interna totale rispetto a P , si trova solo la freccia al punto B .

Si riconsidera nel seguito lo svincolamento (c). Si vogliono determinare i valori di F e C . Il momento flettente $M_{f,1}$ per il tratto (1) della struttura e l'energia interna U_1 valgono

$$M_{f,1}(x) = Fx - C$$

$$U_1 = \int_0^{l/2} \frac{M_f^2}{2EJ} dx = \int_0^{l/2} \frac{(Fx - C)^2}{2EJ} dx = \frac{1}{2EJ} \int_0^{l/2} (F^2 x^2 + C^2 - 2FxC) dx =$$

$$\frac{1}{2EJ} \left(F^2 \frac{l^3}{3 \times 8} + C^2 \frac{l}{2} - 2FC \frac{l^2}{2 \times 4} \right)$$

Il momento flettente $M_{f,2}$ per il tratto (2) della struttura e l'energia interna U_2 valgono

$$M_{f,2}(y) = F\left(y + \frac{l}{2}\right) - C - Py$$

$$U_2 = \int_0^{l/2} \frac{M_f^2}{2EJ} dy = \int_0^{l/2} \frac{\left(F\left(y + \frac{l}{2}\right) - C - Py\right)^2}{2EJ} dy =$$

$$\frac{1}{2EJ} \int_0^{l/2} \left(F^2 y^2 + F^2 \frac{l^2}{4} + 2F^2 y \frac{l}{2} + C^2 + P^2 y^2 - 2FyC - 2F \frac{l}{2} C - 2FPy^2 - 2FPy \frac{l}{2} + 2CPy \right) dx =$$

$$\frac{1}{2EJ} \left(F^2 \frac{l^3}{3 \times 8} + F^2 \frac{l^3}{8} + 2F^2 \frac{l^3}{2 \times 2 \times 4} + C^2 \frac{l}{2} + P^2 \frac{l^3}{3 \times 8} - 2F \frac{l^2}{2 \times 4} C \right.$$

$$\left. - 2F \frac{l}{2} C \frac{l}{2} - 2FP \frac{l^3}{3 \times 8} - 2FP \frac{l^2}{2 \times 4} \frac{l}{2} + CP \frac{l^2}{2 \times 2} \right)$$

Le incognite C ed F si determinano imponendo che la freccia e la rotazione in A della Figura (c) siano nulle. La prima equazione è

$$\frac{\partial U_1}{\partial F} = \frac{1}{2EJ} \left(\frac{1}{12} Fl^3 - \frac{1}{4} Cl^2 \right)$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial F} = \frac{1}{2EJ} \left(F \frac{l^3}{12} + F \frac{l^3}{4} + F \frac{l^3}{4} - C \frac{l^2}{4} - C \frac{l^2}{2} - P \frac{l^3}{12} - P \frac{l^3}{8} \right) =$$

$$\frac{1}{2EJ} \left(\frac{7}{12} Fl^3 - \frac{3}{4} Cl^2 - \frac{5}{24} Pl^3 \right)$$

$$\frac{\partial U}{\partial F} = \frac{\partial(U_1 + U_2)}{\partial F} = f_A = 0 \Rightarrow \frac{1}{12} Fl^3 - \frac{1}{4} Cl^2 + \frac{7}{12} Fl^3 - \frac{3}{4} Cl^2 - \frac{5}{24} Pl^3 = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{2}{3} Fl^3 - Cl^2 - \frac{5}{24} Pl^3 = 0 \Rightarrow \frac{2}{3} Fl - C - \frac{5}{24} Pl = 0$$

La seconda equazione è

$$\frac{\partial U_1}{\partial C} = \frac{1}{2EJ} \left(Cl - \frac{1}{4} Fl^2 \right)$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial C} = \frac{1}{2EJ} \left(Cl - \frac{1}{4} Fl^2 - \frac{1}{2} Fl^2 + \frac{1}{4} Pl^2 \right) = \frac{1}{2EJ} \left(Cl - \frac{3}{4} Fl^2 + \frac{1}{4} Pl^2 \right)$$

$$\frac{\partial U}{\partial C} = \frac{\partial(U_1 + U_2)}{\partial C} = \varphi_A = 0 \Rightarrow 2Cl - Fl^2 + \frac{1}{4} Pl^2 = 0 \Rightarrow 2C - Fl + \frac{1}{4} Pl = 0$$

La soluzione del sistema produce le seguenti espressioni di F e di C in funzione di C :

$$F = \frac{P}{2} ; \quad C = \frac{Pl}{8}$$

Riepilogando, con lo svincolamento (c) si ottiene la stessa soluzione dello svincolamento (b), ma al costo di calcoli più lunghi. Si può però osservare che, nello svincolamento (c), si poteva arguire che $F=P/2$, dato che il problema iniziale (a) è simmetrico. Tenendo conto di questa osservazione, lo

svincolamento (c) produce una sola reazione incognita, come lo svincolamento (b).