

# Appunti per il corso di Progettazione Assistita

Enrico Bertocchi

April 5, 2017

# 1 Relazioni cinematiche di dipendenza tra gradi di libertà

## 1.1 Servo-link

Sia dato un sistema di  $n$  gradi di libertà (gg.d.l.)  $\delta_i$ , e siano definite  $n$  componenti di azione esterna  $F_i$  agenti (compienti lavoro) su tali gg.d.l., e sia definito un sistema di reazioni elastiche associate allo scostamento di tali gg.d.l. dal valore nullo nella forma  $-k_{ij}\delta_j$ . Siano

$$\underline{K}\underline{\delta} = \underline{F} \quad (1)$$

le equazioni di equilibrio ai vari gg.d.l. .

Si intende definire una relazione cinematica di dipendenza tra un g.d.l. nello specifico  $\delta_j$ , ed i restanti  $\delta_i, i \neq j$ , nella forma

$$\delta_j = \sum_{i \neq j} \alpha_{ji} \delta_i + \Delta\delta_j \quad (2)$$

Il termine  $\Delta\delta_j$  è stato introdotto per permettere uno scostamento dalla relazione cinematica stessa, e rappresenta uno spostamento *relativo* tra il termine di combinazione lineare e l'effettiva dislocazione del nodo. Tale termine potrà successivamente essere ridotto a valore nullo (o in generale imposto) con le consuete metodologie di vincolamento del grado di libertà.

Tale relazione cinematica imposta è chiamata *servo-link* o *multi-point constraint (MPC)*, ed è tipicamente implementata nei codici in forma omogenea  $\Delta\delta_j = 0$ .

Se la forma algebrica (2) lega i vari gg.d.l. senza indurre relazioni di subordinazione, l'imposizione della stessa in forma di *assegnazione* sancisce la condizione di dipendenza di  $\delta_j$  dai restanti. Si dirà in particolare che  $\delta_j$  è un g.d.l. *dipendente* (o *tied*) mentre i vari  $\delta_i, i \neq j$  sono gg.d.l. *indipendenti* (anche detti *retained*<sup>1</sup>).

In virtù della (2) sarà quindi possibile scrivere

$$\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_{j-1} \\ \delta_j \\ \delta_{j+1} \\ \vdots \\ \delta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{j,1} & \cdots & \alpha_{j,j-1} & 1 & \alpha_{j,j+1} & \cdots & \alpha_n \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_{j-1} \\ \Delta\delta_j \\ \delta_{j+1} \\ \vdots \\ \delta_n \end{bmatrix} \quad (3)$$

ed in forma compatta

$$\underline{\delta} = \underline{L}\underline{\delta}^*, \quad (4)$$

che risulta essere un semplice cambiamento di base/componenti per la descrizione dello stato del sistema ad  $n$  gg.d.l..

<sup>1</sup>Questa denominazione nasce da un'implementazione alternativa a quella qui descritta che vede un'eliminazione del g.d.l. dipendente con conseguente riduzione del numero delle incognite stesso. I gg.d.l. indipendenti sono invece "mantenuti" da cui la denominazione.

In particolare è possibile introdurre (3) entro (1) ottenendo il cambiamento di incognite

$$\underbrace{\underline{L}^T \underline{K} \underline{L}}_{\underline{K}^*} \delta^* = \underbrace{\underline{L}^T \underline{F}}_{\underline{F}^*} \quad (5)$$

ove la premoltiplicazione di ambo i membri per  $\underline{L}^T$  è stata introdotta per mantenere la simmetria del sistema, nonché una coerente definizione di lavoro virtuale delle azioni esterne nella forma

$$\partial \ell = \langle \underline{F}^*, \partial \delta^* \rangle \quad (6)$$

Andando infine ad analizzare in dettaglio il termine noto di (4), risulta in componenti che

$$F_i^* = F_i + \alpha_{ji} F_j, \quad i \neq j; \quad F_j^* = F_j, \quad (7)$$

ossia che la quota di azione esterna originariamente agente sul  $j$ -esimo g.d.l., ora reso dipendente, si ripartisce sugli altri gg.d.l. secondo gli stessi coefficienti  $\alpha_{ji}$  che definiscono il legame cinematico.

## 1.2 Servo-link, forma con eliminazione del g.d.l. dipendente

Sia dato un sistema di  $n$  gradi di libertà (gg.d.l)  $\delta_i$ , e siano definite  $n$  componenti di azione esterna  $F_i$  agenti (compienti lavoro) su tali gg.d.l., e sia definito un sistema di reazioni elastiche associate allo scostamento di tali gg.d.l. dal valore nullo nella forma  $-k_{ij} \delta_j$ . Siano

$$\underline{K} \underline{\delta} = \underline{F} \quad (8)$$

le equazioni di equilibrio ai vari gg.d.l. .

Si intende definire una relazione cinematica di dipendenza tra un g.d.l, nello specifico  $\delta_j$ , ed i restanti  $\delta_i, i \neq j$ , nella forma

$$\delta_j = \sum_{i \neq j} \alpha_{ji} \delta_i + \Delta_j \quad (9)$$

con termine di scostamento dalla relazione lineare  $\Delta_j$  imposto e potenzialmente non omogeneo.

Tale relazione cinematica imposta è chiamata *servo-link*, *multi-point constraint (MPC)*, o meglio *multi-dof. constraint*.

Se nativamente la forma algebrica (9) lega i vari gg.d.l. senza indurre relazioni di subordinazione, l'imposizione della stessa in forma di *assegnazione* sancisce la condizione di dipendenza di  $\delta_j$  dai restanti. Si dirà in particolare che  $\delta_j$  è un g.d.l. *dipendente* (o *tied*) mentre i vari  $\delta_i, i \neq j$  sono gg.d.l. *indipendenti* (anche detti *retained*).

In virtù della (9) sarà quindi possibile scrivere

$$\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_{j-1} \\ \delta_j \\ \delta_{j+1} \\ \vdots \\ \delta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{j,1} & \cdots & \alpha_{j,j-1} & \alpha_{j,j+1} & \cdots & \alpha_{j,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_{j-1} \\ \delta_{j+1} \\ \vdots \\ \delta_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \Delta_j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

ed in forma compatta

$$\underline{\delta} = \underline{L}\underline{\delta}^* + \underline{\Delta}, \quad (11)$$

Si nota che il sistema ha perso un grado di libertà, essendo la soluzione ristretta al sottoinsieme dei possibili  $\underline{\delta}$  che non violino la condizione (9).

In particolare la soluzione è vincolata a giacere entro un iperpiano  $n - 1$  dimensionale di  $\mathbb{R}^n$ , passante per  $\Delta$  (e non necessariamente per l'origine), con base definita dalle colonne di  $\underline{L}$  e normale data dal vettore

$$\hat{n} = [ \alpha_{j,1} \quad \cdots \quad \alpha_{j,j-1} \quad -1 \quad \alpha_{j,j+1} \quad \cdots \quad \alpha_{j,n} ]^T. \quad (12)$$

Normale a tale sottospazio deve essere anche il vettore delle reazioni vincolari interne  $\underline{R} = \lambda \hat{n}$ , con  $\lambda$  arbitrario. Tale vettore deve infatti compiere lavoro nullo su ogni spostamento compatibile con i vincoli (il vincolo è "liscio"), ovvero su ogni spostamento legato alle colonne di  $\underline{L}$  definenti la base del sottospazio.

È possibile introdurre la (10) entro la (8) ottenendo la forma

$$\underline{K}\underline{L}\underline{\delta}^* = \underline{F} - \underline{K}\underline{\Delta} \quad (13)$$

che risulta essere un sistema sovradeterminato di  $n$  equazioni nelle  $n-1$  incognite  $\underline{\delta}^*$ .

Risulta tuttavia *non* necessario annullare il residuo della forma (13),

$$r = \underline{K}\underline{L}\underline{\delta}^* - \underline{F} + \underline{K}\underline{\Delta} \quad (14)$$

ma è sufficiente annullarne la proiezione<sup>2</sup> entro il sottospazio delle configurazioni ammesse dai vincoli

$$r' = \underline{L}^T r = 0 \quad (15)$$

Questa imposizione è più debole dell'originaria, e il sistema di equazioni

$$\underbrace{\underline{L}^T \underline{K} \underline{L}}_{\underline{K}^*} \underline{\delta}^* = \underbrace{\underline{L}^T (\underline{F} - \underline{K} \underline{\Delta})}_{\underline{F}^*} \quad (16)$$

risulta non più sovradeterminato.

La premoltiplicazione di ambo i membri per  $\underline{L}^T$  mantiene inoltre la simmetria del sistema, nonché una coerente definizione di lavoro virtuale delle azioni esterne nella forma

$$\partial \ell = \langle \underline{F}^*, \partial \underline{\delta}^* \rangle \quad (17)$$

<sup>2</sup>ricordiamo qui che il prodotto tra una matrice  $\underline{A}^T$  e un vettore  $\underline{b}$  restituisce un vettore colonna contenente i prodotti scalari tra le colonne di  $\underline{A}$  e  $\underline{b}$

Andando infine a sviluppare il termine noto di (11) trovo che le azioni esterne sui gradi di libertà residui  $i \in \{1 \dots j-1, j+1, \dots n\}$  risultano essere

$$F_i^* = F_i + \alpha_{ji}F_j - (k_{ij} + \alpha_{ji}k_{jj}) \Delta_j. \quad (18)$$

La quota di azione esterna originariamente agente sul  $j$ -esimo g.d.l., ora reso dipendente e rimosso dal sistema, si ripartisce sugli altri gg.d.l. secondo gli stessi coefficienti  $\alpha_{ji}$  che definiscono il legame cinematico, più un contributo legato ad un eventuale scostamento non nullo. Questa ripartizione avviene ad opera delle reazioni vincolari associate alla relazione cinematica imposta.

### 1.3 Link di moto di corpo rigido RBE2

Si considera un nodo  $C$  di coordinate  $x_C, y_C, z_C$ , detto nodo di controllo, ed una nuvola di  $n$  nodi  $P_i$  di coordinate  $x_i, y_i, z_i$ .

Si vuole imporre un legame cinematico che renda i gg.d.l dei nodi  $P_i$  dipendenti dalle rototraslazioni del nodo di controllo  $C$  secondo legge di moto di corpo rigido.

In particolare si impone, per ogni  $i$

$$\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \theta_i \\ \phi_i \\ \psi_i \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & +(z_i - z_C) & -(y_i - y_C) \\ 0 & 1 & 0 & -(z_i - z_C) & 0 & +(x_i - x_C) \\ 0 & 0 & 1 & +(y_i - y_C) & -(x_i - x_C) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{L_{iC}}}} \cdot \begin{bmatrix} u_C \\ v_C \\ w_C \\ \theta_C \\ \phi_C \\ \psi_C \end{bmatrix} \quad (19)$$

ove  $u, v, w$  e  $\theta, \phi, \psi$  sono rispettivamente le componenti di traslazione e rotazione nodali espresse rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano  $x, y, z$ .

Risulta tipicamente possibile associare la relazione di dipendenza (19) ad un sottoinsieme dei gg.d.l. dei nodi  $P_i$  semplicemente omettendo le relative imposizioni di vincolo interno. Nel caso, i restanti gg.d.l. hanno libero scostamento rispetto alla cinematica del corpo rigido.

### 1.4 Link di forze/momenti risultanti distribuiti RBE3

Si considera un nodo dipendente  $C$  di coordinate  $x_C, y_C, z_C$ , detto nodo di controllo (alle forze... altrimenti la definizione è impropria), ed una nuvola di  $n$  nodi indipendenti  $P_i$  di coordinate  $x_i, y_i, z_i$  e con peso relativo assegnato  $q_i$ .

Si considera applicato al nodo  $C$  un sistema di azioni esterne nella forma delle tre componenti di forza  $U_C, V_C, W_C$  e nelle tre componenti di momento  $\Omega_C, \Phi_C, \Psi_C$ , riunite nel vettore

$$\underline{\underline{F}}_C = [U_C \ V_C \ W_C \ \Omega_C \ \Phi_C \ \Psi_C]^T$$

Si definisce un centro di massa  $G$  della nuvola di punti, le cui coordinate sono al solito

$$x_G = \frac{\sum_i q_i x_i}{\sum_i q_i}, \quad y_G = \frac{\sum_i q_i y_i}{\sum_i q_i}, \quad z_G = \frac{\sum_i q_i z_i}{\sum_i q_i}. \quad (20)$$

Si suppone inoltre che il sistema di riferimento  $Gxyz$  sia **principale d'inerzia** per la distribuzione di pesi; nel caso tale ipotesi non sia verificata occorre procedere come segue:

- cambio di sistema di riferimento da terna  $xyz$  ad una terna ausiliaria  $\xi\eta\zeta$  con orientazione principale d'inerzia per la specifica distribuzione RBE3;
- applicazione della procedura sotto descritta utilizzando posizioni nodali e componenti di forza/momento scomposte secondo la terna ausiliaria  $\xi\eta\zeta$  in luogo della predefinita  $xyz$ ;
- trasformazione inversa delle quantità risultanti da terna ausiliaria  $\xi\eta\zeta$  a terna originale  $xyz$ .

Si definisce quindi una prima relazione di dipendenza cinematica, per cui le rototraslazioni

$$\underline{\delta}_C = [u_C \ v_C \ w_C \ \theta_C \ \phi_C \ \psi_C]^T$$

di  $C$  sui tre assi  $x, y, z$  sono definite in funzione delle rototraslazioni

$$\underline{\delta}_G = [u_G \ v_G \ w_G \ \theta_G \ \phi_G \ \psi_G]^T$$

del centro di massa  $G$  secondo il vincolo di rototraslazione rigida

$$\begin{bmatrix} u_C \\ v_C \\ w_C \\ \theta_C \\ \phi_C \\ \psi_C \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & +(z_C - z_G) & -(y_C - y_G) \\ 0 & 1 & 0 & -(z_C - z_G) & 0 & +(x_C - x_G) \\ 0 & 0 & 1 & +(y_C - y_G) & -(x_C - x_G) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{L}_{CG}} \cdot \begin{bmatrix} u_G \\ v_G \\ w_G \\ \theta_G \\ \phi_G \\ \psi_G \end{bmatrix} \quad (21)$$

già visto per le RBE2.

Tale relazione cinematica può essere imposta solo su un sottoinsieme dei gg.d.l. associati al nodo  $C$ , lasciando svincolati (e indipendenti) i restanti.

Come osservato al paragrafo (1.1), all'imposizione di tali relazioni cinematiche è associata una riduzione a nuovo punto di applicazione  $G$  delle azioni agenti su  $C$ , con l'introduzione di opportuni momenti di trasporto come da

$$\underline{F}_G = [\underline{L}_{CG}]^T \cdot \underline{F}_C, \quad \underline{F}_G = [U_G \ V_G \ W_G \ \Theta_G \ \Phi_G \ \Psi_G]^T \quad (22)$$

Tale vincolo deriva dall'imposizione di pari lavoro *virtuale* dei sistemi di forze su  $C$  e su  $G$

$$\mathcal{L}_C = \underline{\delta}_C^T \underline{F}_C = (\underline{L}_{CG} \underline{\delta}_G)^T \underline{F}_C = \underline{\delta}_G^T \underbrace{\underline{L}_{CG}^T \underline{F}_C}_{\underline{F}_G} = \underline{\delta}_G^T \underline{F}_G = \mathcal{L}_G \quad (23)$$

Si definisce quindi una seconda relazione di dipendenza per cui da una parte lo spostamento del nodo  $G$  risulti la media pesata degli spostamenti ai nodi  $P_i$ , ovvero

$$u_G = \frac{\sum_i q_i u_i}{\sum_i q_i}, \quad v_G = \frac{\sum_i q_i v_i}{\sum_i q_i}, \quad w_G = \frac{\sum_i q_i w_i}{\sum_i q_i}, \quad (24)$$

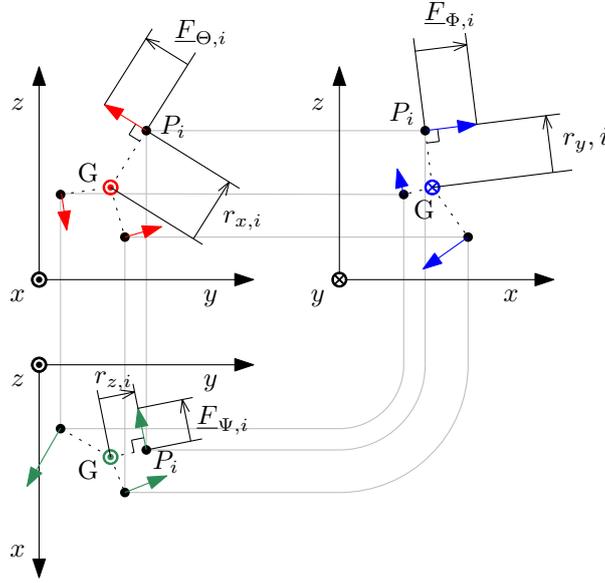


Figure 1: Schema distribuzione momenti

e dall'altra le forze applicate in  $C$  e ridotte a  $G$  si distribuiscono ai nodi  $P_i$  secondo i pesi dati, ossia

$$U'_i = U_G \frac{q_i}{\sum_i q_i}, \quad V'_i = V_G \frac{q_i}{\sum_i q_i}, \quad W'_i = W_G \frac{q_i}{\sum_i q_i}. \quad (25)$$

Per quanto riguarda la distribuzione dei momenti ridotti a  $G$  sui nodi  $P_i$ , si preferisce operare in termini di una seconda quota di forze nodali  $U''_i, V''_i, W''_i$  piuttosto che in termini di quote momento  $\Theta'_i, \Phi'_i, \Psi'_i$ .

Riferendosi a Figura 1, si considerano le componenti di momento  $\Theta_G, \Phi_G, \Psi_G$  singolarmente nella riduzione a sistemi di forze equivalenti.

Preso l'esempio particolare della componente  $z$  di momento  $\Psi_G$ , ad essa viene sostituito un sistema equivalente di forze  $\underline{F}_{\Psi,i}$  distribuite ai punti  $P_i$  in sole componenti  $x, y$  tali da avere

- retta d'azione sul piano  $x, y$ , normale alla congiungente  $G - P_i$  ivi proiettata
- verso coerente con il momento stesso
- modulo proporzionale alla distanza proiettata

$$r_{z,i} = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}, \quad \Delta x_i = x_i - x_G, \quad \Delta y_i = y_i - y_G \quad (26)$$

e al peso  $q_i$  del nodo

- momento risultante della distribuzione pari a  $\Psi_G \hat{k}$

In particolare risulta

$$\underline{F}_{\Psi,i} = \frac{\Psi_G q_i}{\sum_j q_j r_{z,j}^2} (-\Delta y_i \hat{i} + \Delta x_i \hat{j}) \quad (27)$$

e, una volta definiti

$$r_{x,i} = \sqrt{\Delta y_i^2 + \Delta z_i^2}, \quad r_{y,i} = \sqrt{\Delta z_i^2 + \Delta x_i^2}, \quad \Delta z_i = z_i - z_G$$

si hanno per le altre componenti di momento le forme

$$\underline{F}_{\Theta,i} = \frac{\Theta_G q_i}{\sum_j q_j r_{z,j}^2} \left( -\Delta z_i \hat{j} + \Delta y_i \hat{k} \right) \quad (28)$$

$$\underline{F}_{\Phi,i} = \frac{\Phi_G q_i}{\sum_j q_j r_{y,j}^2} \left( -\Delta x_i \hat{k} + \Delta z_i \hat{i} \right) \quad (29)$$

le quali, raccolte per componenti e in notazione più compatta, danno

$$U_i'' \hat{i} + V_i'' \hat{j} + W_i'' \hat{k} = q_i \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\Theta_G}{\sum_j q_j r_{z,j}^2} & \frac{\Phi_G}{\sum_j q_j r_{y,j}^2} & \frac{\Psi_G}{\sum_j q_j r_{z,j}^2} \\ \Delta x_i & \Delta y_i & \Delta z_i \end{bmatrix} \quad (30)$$

I termini in (30) andranno sommati a quelli ricavati in (25), per cui la forza distribuita dal link RBE3 sull' $i$ -esimo nodo risulterà

$$\underline{F}_i = U_i \hat{i} + V_i \hat{j} + W_i \hat{k} = (U_i' + U_i'') \hat{i} + (V_i' + V_i'') \hat{j} + (W_i' + W_i'') \hat{k} \quad (31)$$

o, in forma algebrica

$$\begin{bmatrix} U_i \\ V_i \\ W_i \end{bmatrix} = q_i \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sum_j q_j} & 0 & 0 & 0 & +\frac{\Delta z_i}{\sum_j q_j r_{y,j}^2} & -\frac{\Delta y_i}{\sum_j q_j r_{z,j}^2} \\ 0 & \frac{1}{\sum_j q_j} & 0 & -\frac{\Delta z_i}{\sum_j q_j r_{x,j}^2} & 0 & +\frac{\Delta x_i}{\sum_j q_j r_{z,j}^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sum_j q_j} & +\frac{\Delta y_i}{\sum_j q_j r_{x,j}^2} & -\frac{\Delta x_i}{\sum_j q_j r_{y,j}^2} & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{L}_{GP,i}^T} \begin{bmatrix} U_G \\ V_G \\ W_G \\ \Theta_G \\ \Phi_G \\ \Psi_G \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$\Theta_i = \Phi_i = \Psi_i = 0 \quad (33)$$

Tale relazione è definita in forma specifica per ogni nodo  $P_i$ .

Alla distribuzione di forza appena descritta è associata la forma agli spostamenti

$$\underline{\delta}_G = \underbrace{\left[ \underline{L}_{GP,1} \quad \cdots \quad \underline{L}_{GP,i} \quad \cdots \quad \underline{L}_{GP,n} \right]}_{\underline{L}_{GP}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ v_n \\ w_n \end{bmatrix}}_{\underline{\delta}_v} \quad (34)$$

ove  $\underline{L}_{GP}$  è definita per blocchi. Tale forma agli spostamenti definisce il moto del baricentro  $G$  in funzione del moto dei punti della distribuzione; a titolo di esempio lo spostamento  $u_G$  risulta definito dall'Eq. (34) come

$$u_G = \frac{\sum_i q_i \langle [1, 0, 0], [u_i, v_i, w_i] \rangle}{\sum_i q_i} \quad (35)$$

mentre la rotazione  $\psi_G$  risulta definita come

$$\psi_G = \frac{\sum_i q_i \langle [-\Delta y_i, +\Delta x_i, 0], [u_i, v_i, w_i] \rangle}{\sum_i q_i r_{z,i}^2} \quad (36)$$

ove  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  è il consueto prodotto scalare.

Ambo le forme risultano riconducibili ad una proiezione pesata e normalizzata degli spostamenti dei nodi indipendenti  $P_i$  su forme di moto elementari della distribuzione di punti, ad esempio una traslazione  $x$  come in (35) o una rotazione  $(G, z)$  come in (36). Si può inoltre notare che i numeratori delle (35) e (36) sono forme integrate nel tempo della quantità di moto e del momento della quantità di moto della distribuzione<sup>3</sup>, mentre i denominatori sono rispettivamente una massa e un momento d'inerzia.

Ricordando infine la (21) si può infine esprimere per il link RBE3 una condizione cinematica complessiva

$$\underline{\delta}_c = \underline{\underline{L}}_{CG} \cdot \underline{\underline{L}}_{GP} \cdot \underline{\delta}_{v_i} \quad (37)$$

ed una caratteristica di distribuzione delle forze ai nodi  $P_i$

$$\underline{F}_i = \underline{\underline{L}}_{GP,i}^T \cdot \underline{\underline{L}}_{CG}^T \cdot \underline{F}_C, \quad i = 1 \dots n. \quad (38)$$

---

<sup>3</sup>Tali quantità sono integrate da una condizione iniziale scarica/indeformata ad una condizione finale sollecitata/deformata; appaiono infatti gli spostamenti nodali al posto delle velocità nodali.

## 2 Algoritmo Newton-Raphson per sistemi di equazioni nonlineari

### 2.1 Iterazione base

Consideriamo un sistema lineare di  $n$  equazioni

$$\underline{R}(\underline{u}) = \underline{F}(\underline{u}) \quad (39)$$

nelle  $n$  componenti incognite del vettore  $\underline{u}$ , con

$$\underline{R} : \underline{u} \rightarrow \mathbb{R}^n, \underline{u} \in C \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$\underline{F} : \underline{u} \rightarrow \mathbb{R}^n, \underline{u} \in C \subseteq \mathbb{R}^n$$

funzioni vettoriali di variabile vettoriale.

Nel caso specifico della soluzione di sistemi di equazioni derivate dagli equilibri nodali di strutture discretizzate con metodo FEM, ho

$\underline{u}$ : vettore contenente le componenti di spostamento/rotazione nodale dalla configurazione indeformata (incognite);

$\underline{F}(\underline{u})$ : vettore contenente le componenti di forza/coppia nodale applicate dall'esterno sul sistema, supposte note per una data configurazione della struttura <sup>4</sup>;

$\underline{R}(\underline{u})$ : vettore contenente le componenti di azione nodale necessarie a mantenere la struttura in equilibrio nello stato deformativo associato al vettore spostamenti nodali  $\underline{u}$ , ovvero vettore contenente le componenti di azione nodale associate (uguali e contrarie) alle reazioni elastiche della struttura costretta in stato deformato. Nel caso particolare di sistema elastico lineare  $\underline{R}(\underline{u}) = \underline{K}\underline{u}$ , con  $K$  matrice di rigidezza.

Si nota che tale interpretazione dei termini dell'equazione 39 è appropriata nel caso le condizioni al contorno siano alle sole forze. Nel caso in cui siano definiti vincoli di spostamento nodale imposto alcune coppie di termini coniugati  $R_l(\underline{u})$ ,  $F_l(\underline{u})$  risulteranno modificate in quanto all'equazione di equilibrio  $l$ -esima si sostituisce l'identità cinematica tra spostamenti incognito ed imposto.

Una scrittura alternativa prevede la definizione e l'annullamento di un termine di residuo

$$\underline{r}(\underline{u}) = \underline{0} \quad (40)$$

con

$$\underline{r}(\underline{u}) = \underline{R}(\underline{u}) - \underline{F}(\underline{u}) \quad (41)$$

Tale scrittura permette di riassumere in un unico termine le variazioni in  $\underline{u}$  di forze e reazioni elastiche, per cui risulta vantaggioso procedere con tale notazione.

Il metodo N-R è costruito a partire dallo sviluppo in serie di Taylor al primo ordine dell'equazione 40 nell'intorno di un punto di iterato  $i$ -esimo  $\underline{u}^i$ , ossia

$$\underline{r}(\underline{u}^*) = \underline{r}(\underline{u}^i) + \underline{J}_r(\underline{u}^i) \cdot (\underline{u}^* - \underline{u}^i) + o(\underline{u}^* - \underline{u}^i) = \underline{0}. \quad (42)$$

---

<sup>4</sup>la dipendenza delle forze esterne dalla configurazione è stata inserita in questa trattazione per amor di generalità, nonché per includere entro la stessa fenomeni nonlineari specifici quali l'instabilità dei rotori o la pressurizzazione di membrane

In tale espressione<sup>5</sup>

$$[\underline{J}_r(\underline{u}^i)]_{l,m} = [\underline{J}_r^i]_{l,m} = \left. \frac{\partial r_l}{\partial u_m} \right|_{\underline{u}=\underline{u}^i}, \quad l, m = 1 \dots n \quad (43)$$

è lo Jacobiano della funzione residuo  $r$  calcolato al punto  $\underline{u}^i$ , mentre  $\underline{u}^*$  è la soluzione esatta incognita; data la natura della funzione residuo risulta inoltre

$$\underline{J}_r^i = \underline{J}_R^i - \underline{J}_F^i \quad (44)$$

ove

$$[\underline{J}_R^i]_{l,m} = \left. \frac{\partial R_l}{\partial u_m} \right|_{\underline{u}=\underline{u}^i}, \quad [\underline{J}_F^i]_{l,m} = \left. \frac{\partial F_l}{\partial u_m} \right|_{\underline{u}=\underline{u}^i}, \quad l, m = 1 \dots n \quad (45)$$

Notiamo che nel caso  $\underline{F}$  sia costante in  $\underline{u}$  si ha

$$\underline{J}_F^i = \underline{0} \Rightarrow \underline{J}_r^i = \underline{J}_R^i \quad (46)$$

Trascurando il termine di ordine superiore, l'identità 42 non risulterà più strettamente verificata; sostituendo tuttavia alla soluzione esatta  $\underline{u}^*$  un meno pretenzioso termine di iterato successivo  $\underline{u}^{i+1}$  ottengo la forma

$$\underline{J}_r^i(\underline{u}^{i+1} - \underline{u}^i) = -\underline{r}(\underline{u}^i) \quad (47)$$

da cui, supponendo  $\underline{J}_r^i$  non singolare<sup>6</sup>

$$\underline{u}^{i+1} = \underline{u}^i - \underline{J}_r^i \backslash \underline{r}(\underline{u}^i). \quad (48)$$

In notazione equivalente, posto

$$\delta \underline{u}^i \equiv \underline{u}^{i+1} - \underline{u}^i, \quad \underline{K}^i \equiv \underline{J}_r^i, \quad \underline{r}^i \equiv \underline{r}(\underline{u}^i), \quad (49)$$

abbiamo l'espressione

$$\delta \underline{u}^i = -\underline{K}^i \backslash \underline{r}^i \quad (50)$$

nella quale è evidenziato il ruolo di matrice di rigidezza *tangente* che  $\underline{J}_r^i$  ricopre, in analogia al caso lineare.

Fornito infine un vettore di primo tentativo  $\underline{u}^0$ , la 48 definisce una successione iterativa di termini che *potenzialmente* converge alla soluzione esatta  $\underline{u}^*$ .

Dovendo limitare ad un numero finito le iterazioni di 48 o 50, occorre definire dei criteri di convergenza (accettazione risultato, fine iterazione) nella forma di

- Convergenza ai residui: stop iterazione implicato da  $\|\underline{r}(\underline{u}^{i+1})\| \leq \epsilon_r$ , con  $\epsilon_r$  errore (assoluto) ammesso ai residui;
- Convergenza alle incognite (“agli spostamenti” nello specifico FEM): stop iterazione implicato da  $\|\underline{u}^{i+1} - \underline{u}^i\| = \|\delta \underline{u}^i\| \leq \epsilon_u$ , con  $\epsilon_u$  errore (assoluto) ammesso alle incognite.

<sup>5</sup>qui utilizzo la notazione per cui  $[A]_{i,j}$  è l'elemento alla  $i$ -esima riga e  $j$ -esima colonna di  $A$

<sup>6</sup>la notazione  $\underline{x} = \underline{A} \backslash \underline{b}$  indica la soluzione di un sistema lineare di matrice  $\underline{A}$ , vettore termini noti  $\underline{b}$ , e l'assegnazione del risultato al vettore delle incognite  $\underline{x}$ .

L'implementazione di valori di tolleranza *relativa* per incognite e residui è ovviamente possibile (e in generale auspicabile) una volta individuati opportuni termini di riferimento in valore assoluto per forze e spostamenti.

La determinazione di tali valori di tolleranza ammissibile è un aspetto cruciale dell'analisi nonlineare in quanto la richiesta di una eccessiva precisione aumenta inutilmente i tempi di calcolo, mentre tolleranze molto lasche possono produrre soluzioni inaccurate.

Una possibile implementazione dell'algoritmo Newton-Raphson, iterazione base è riportata come Algorithm 1.

---

**Algorithm 1** Iterato N-R base

---

**Require:**  $\underline{u}^0$   
**Require:**  $\underline{r}(\underline{u}^i)$  calcolabile  $\forall \underline{u}^i$  di iterato  
**Require:**  $\underline{J}_r(\underline{u}^i)$  calcolabile  $\forall \underline{u}^i$  di iterato, e non singolare  
 $i \leftarrow 0$   
**while** ( $\|\underline{r}(\underline{u}^i)\| > \epsilon_F$ )  $\vee$  ( $i \geq 1 \wedge (\|\underline{u}^i - \underline{u}^{i-1}\| > \epsilon_u)$ ) **do**  
     $\underline{K}^i \leftarrow \underline{J}_r(\underline{u}^i)$   
     $\underline{r}^i \leftarrow \underline{r}(\underline{u}^i)$   
     $\underline{\delta u}^i \leftarrow -\underline{K}^i \setminus \underline{r}^i$   
     $\underline{u}^{i+1} \leftarrow \underline{u}^i + \underline{\delta u}^i$   
     $i \leftarrow i + 1$   
**end while**  
 $\underline{u}^* \leftarrow \underline{u}^i$

---

## 2.2 Caso unidimensionale: algoritmo di Newton e soluzione grafica

blablabla, vedi Figura 2.

## 2.3 Caso bidimensionale: accenno di soluzione grafica

blablabla, vedi Figura 3a e Figura 3b.

---

**Algorithm 2** Algoritmo N-R per applicazioni strutturali (parziale..)

---

**Require:**  $\underline{u}_0^*$  in equilibrio con  $\underline{F}_0$ , potenzialmente ambedue = 0

**Require:**  $\underline{R}(\underline{u}_j^i)$  calcolabile  $\forall \underline{u}_j^i$  di iterato

**Require:**  $\underline{J}_R(\underline{u}_j^i)$  calcolabile  $\forall \underline{u}_j^i$  di iterato, e non singolare

**for**  $j = 1 \rightarrow m$  **do**

$\underline{u}_j^0 \leftarrow \underline{u}_{j-1}^*$

$i \leftarrow 0$

$conv \leftarrow \text{False}$

**while**  $((i \leq imax) \wedge (! conv))$  **do**

$\underline{K}_j^i \leftarrow \underline{J}_R(\underline{u}_j^i)$

$\underline{R}_j^i \leftarrow \underline{R}(\underline{u}_j^i)$

$\underline{\Delta u}_j^i \leftarrow \underline{K}_j^i \setminus (\underline{F}_j - \underline{R}_j^i)$

$\underline{u}_j^{i+1} \leftarrow \underline{u}_j^i + \underline{\Delta u}_j^i$

$i \leftarrow i + 1$

**if**  $(\|\underline{F}_j - \underline{R}(\underline{u}_j^i)\| \leq \epsilon_F) \wedge (\|\underline{u}_j^i - \underline{u}_j^{i-1}\| \leq \epsilon_u)$  **then**

$conv \leftarrow \text{True}$

**end if**

**end while**

**if**  $conv = \text{True}$  **then**

$\underline{u}_j^* \leftarrow \underline{u}_j^i$

**else**

Break.

▷ "Houston, we've had a problem."

**end if**

**end for**

---

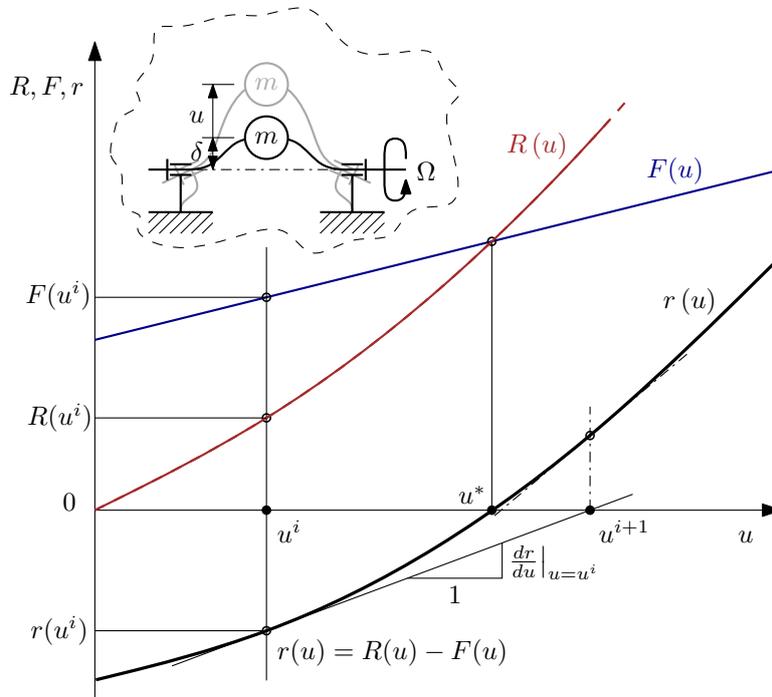


Figure 2: Costruzione grafica per l'iterato N-R, caso N=1

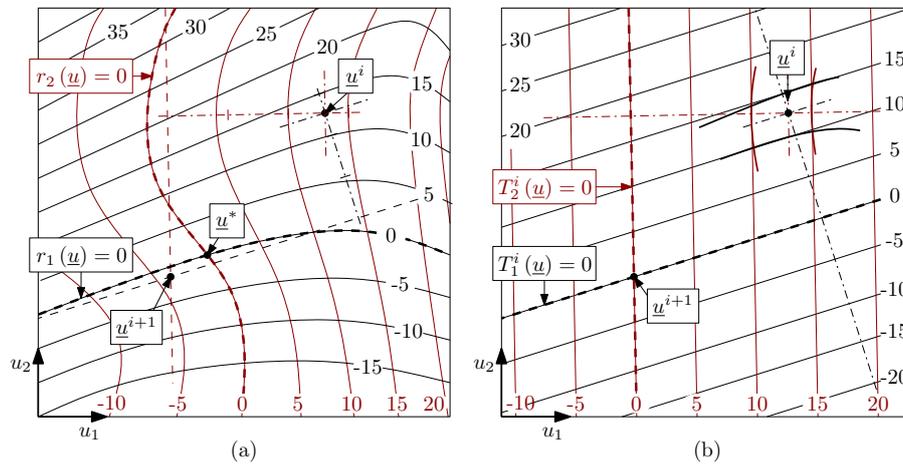


Figure 3: Costruzione grafica per l'iterato N-R, caso  $N=2$